3.4 Mehrdimensionale Verteilungen

- stochastische Variablen: $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

  $P(\underline{x})d^n x$ ... Wahrscheinlichkeit für $[x_1+dx_1, \dots, x_n+dx_n]$

- unabhängige stochastische Variablen: x, y

$$\boxed{P(x,y)\,dx\,dy = P(x)\,P(y)\,dx\,dy} \quad (3.29)$$

... Multiplikationsregel

- Def.: Korrelationsfunktionen:

$$\boxed{\begin{aligned} C_{ij} &= \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle \\ &= \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle \end{aligned}} \quad (3.30)$$

... Kovarianzmatrix

zeigt an: Korrelationen von Fluktuationen um $\langle x_i \rangle$ und $\langle x_j \rangle$

Bsp: $P(x,y) = P(x)\,P(y)$

$$\longrightarrow \quad C_{xy} = \int dx\,dy\, P(x)\,(x - \langle x \rangle)\, P(y)\,(y - \langle y \rangle) = 0!$$

- Wahrscheinlichkeitsdichte für $[x_1+dx_1, \dots x_{n-1}+dx_{n-1}]$

$$\boxed{P(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int dx_n\, P(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)} \quad (3.31)$$

- Satz:

Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n)$ für $x_1, \dots, x_k$, wenn $x_{k+1} \dots x_n$ mit Sicherheit vorliegen:

$$P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n) = \frac{P(x_1, \dots, x_n)}{P(x_{k+1}, \dots, x_n)} \quad (3.32)$$

wobei $P(x_{k+1}, \dots, x_n) = \int dx_1 \dots dx_k\, P(x_1, \dots, x_n)$

„Beweis": $P(x_1, \dots, x_n) = P(x_1 \dots x_k | x_{k+1}, \dots, x_n)\, P(x_{k+1} \dots x_n)$

$$\int P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_k = 1! \quad \text{... Normierung}$$

stochastische unabh. Variablen: $P(x|y) = \dfrac{P(x)\,P(y)}{P(y)} = P(x)!$

3.5 Zentraler Grenzwertsatz

- zentraler Satz für Stat. Mechanik
- Satz:

> Seien $x_1, x_2, \dots, x_N$ voneinander unabhängige Zufalls-variable mit derselben Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(x)$, also insbesondere ist $\langle x_i \rangle = \langle x \rangle$ und $\Delta x_i = \Delta x$.
>
> Dann genügt die Zufallsvariable $y = x_1 + x_2 + \dots x_N$ im Grenzfall $N \to \infty$ der Gaußschen Wahrscheinlichkeitsverteilung:
>
> $$P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi (\Delta y)^2}}\, e^{-\frac{(y-\langle y\rangle)^2}{2(\Delta y)^2}} \qquad (3.33)$$
>
> mit $\langle y \rangle = N \langle x \rangle$ und $\Delta y^2 = N \Delta x^2$.
>
> Insbesondere gilt: $\frac{\Delta y}{\langle y \rangle} = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle \sqrt{N}}$ also Aussagen über y sind für große N scharf.

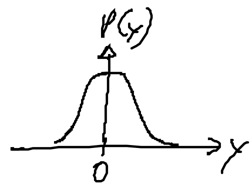
- Bsp: (i) System nicht wechselwirkender Teilchen (z.B. bei Temp T)

  x_i = Energie des i-ten Teilchens

  y = Gesamtenergie

  (ii) Zufallbewegung („random walk“)

  insbes. Brownsche Bewegung



  x_i = Zuwachs beim i-ten (mikroskop.) Schritt

  (z.B. durch Stöße der Flüssigkeitsmoleküle)

  y = Position nach N Schritten

- Beweis:

  Führe ein: $$z(\{x_i\}) = \sum_i \frac{x_i - \langle x \rangle}{\sqrt{N}} = \frac{y - N\langle x \rangle}{\sqrt{N}} \qquad (3.34)$$

  Wahrscheinlichkeitsdichte

  $$P(z) \overset{(3.8)}{=} \langle \delta(z - z(\{x_i\})) \rangle$$

  $$= \int dx_1 \dots dx_N \, w(x_1) \dots w(x_N)\, \delta\left(z - \frac{x_1 + \dots x_N}{\sqrt{N}} + \sqrt{N}\langle x \rangle\right)$$

  $$\left[\delta(\dots) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik\dots}\right] = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \int dx_1 \dots dx_N \, w(x_1) \dots w(x_N)\, e^{-ik\frac{x_1 + \dots x_N}{\sqrt{N}} + ik\sqrt{N}\langle x \rangle}$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikz + ik\sqrt{N}\langle x\rangle} \Big[\underbrace{G\big(\tfrac{k}{\sqrt{N}}\big)}_{\text{charakt. Fkt. zu } w(x)}\Big]^N$$

mit $G\big(\frac{k}{\sqrt{N}}\big) \overset{(3.16)}{=} \exp\Big[-i\frac{k}{\sqrt{N}}\underbrace{\langle x\rangle_c}_{\langle x\rangle} - \frac{1}{2}\frac{k^2}{N}\underbrace{\langle x^2\rangle_c}_{(\Delta x)^2} + i\frac{1}{6}\frac{k^3}{N^{3/2}}\langle x^3\rangle_c + \dots\Big]$

$$\ln G(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!}\langle x^n\rangle_c$$

$$P(z) = \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{\overbrace{ikz - \frac{1}{2}k^2\Delta x^2}^{e^{\cdots} = G_p(k) = e^{-\frac{1}{2}k^2\Delta x^2}} + \underbrace{i\frac{1}{6}\frac{k^3}{\sqrt{N}}\langle x^3\rangle_c + \dots}_{\to 0,\ N\to\infty}}$$

$(N\to\infty)$ $$\underset{(3.13)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\Delta x)^2}}\, e^{-\frac{z^2}{2(\Delta x)^2}}$$

mit $P(z)\,dz = P(y)\,dy$ und $\frac{dz}{dy} \overset{(3.34)}{=} \frac{1}{\sqrt{N}}$

$$\longrightarrow \quad P(y) \overset{(3.34)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi N(\Delta x)^2}}\, e^{-\frac{(y-N\langle x\rangle)^2}{2N(\Delta x)^2}} \quad \text{qed}$$

- Bem.: (3.33) auch gültig für abhängige x_i unter gewissen Bedingungen. (van Kampen)

4. Kinetische Theorie der Gase

- Studium der makroskopischen Eigenschaften einer großen Zahl von Teilchen, ausgehend von (klassischen) Bewegungsgleichungen
- Ziele: (i) Einführung der Boltzmann Gl.
  (ii) Herleitung makroskopischer Bewegungsgln.
  (iii) Motivation des zentralen Postulats der Stat. Mechanik zur Entropie
  (iv) Diskussion von Irreversibilität anhand der Boltzmann Gl. und H-Theorem

4.1 Der Liouvillesche Satz und Implikationen

- System von N wechselwirkenden Teilchen

Mechanik: dessen Mikrozustand eindeutig bestimmt durch

Orte $q \equiv \{q_1, q_2, \ldots, q_N\}$ und

Impulse $p \equiv \{p_1, p_2, \ldots, p_N\}$

$\{q, p\}$ = Punkt im $6N$ dimens. Phasenraum Γ

- Dynamik: Hamiltonsche Bewgl.

$$\boxed{\frac{d q_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{d p_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad H \ldots \text{Hamiltonoperator}} \quad (4.1)$$

Zeitumkehrsymmetrie:

$t \to -t, \quad p_i \to -p_i, \quad H(q,p) = H(q,-p)$

$\Longrightarrow$ (4.1) ist zeitumkehr invariant

$\longrightarrow$ zeitumgekehrte Bahnen $q(-t)$ sind auch Lsgn von (4.1)

also: (4.1) beschreiben reversible Vorgänge