

3.4 Mehrdimensionale Verteilungen

- stochastische Variablen: $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$P(\underline{x}) d^n x$... Wahrscheinlichkeit für $[x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n]$

- unabhängige stochastische Variablen: x, y

$$P(x, y) dx dy = P(x) P(y) dx dy \quad (3.29)$$

... Multiplikationsregel

- Def: Korrelationsfunktionen:

$$C_{ij} = \langle (x_i - \langle x_i \rangle) (x_j - \langle x_j \rangle) \rangle \quad (3.30)$$

$$= \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle$$

... Kovarianzmatrix

zeigt an: Korrelationen von Fluktuationen um $\langle x_i \rangle$ und $\langle x_j \rangle$

Bsp: $P(x, y) = P(x) P(y)$

$$\rightarrow C_{xy} = \int dx dy P(x) (x - \langle x \rangle) P(y) (y - \langle y \rangle)$$

$$= 0!$$

- Wahrscheinlichkeitsdichte für $[x_1 + dx_1, \dots, x_{n-1} + dx_{n-1}]$

$$P(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int dx_n P(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \quad (3.31)$$

- Satz:

Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $P(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n)$
für x_1, \dots, x_k , wenn x_{k+1}, \dots, x_n mit Sicherheit vorliegen:

$$P(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) = \frac{P(x_1, \dots, x_n)}{P(x_{k+1}, \dots, x_n)} \quad (3.32)$$

wobei $P(x_{k+1}, \dots, x_n) = \int dx_1 \dots dx_k P(x_1, \dots, x_n)$

„Beweis“: $P(x_1, \dots, x_n) = P(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) P(x_{k+1}, \dots, x_n)$

$$\int P(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_k = 1! \dots \text{ Normierung}$$

stochastische unabh. Variablen: $P(x|y) = \frac{P(x) P(y)}{P(y)} = P(x)!$

3.5 Zentraler Grenzwertsatz

- zentraler Satz für Stat. Mech. anik
- Satz:

Seien x_1, x_2, \dots, x_N voneinander unabhängige Zufallsvariable mit derselben Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(x)$, also insbesondere ist $\langle x_i \rangle = \langle x \rangle$ und $\Delta x_i = \Delta x$.

Dann geht die Zufallsvariable $y = x_1 + x_2 + \dots + x_N$ im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ der Gaußschen Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} (\Delta y)^2} e^{-\frac{(y - \langle y \rangle)^2}{2(\Delta y)^2}} \quad (3.33)$$

mit $\langle y \rangle = N \langle x \rangle$ und $\Delta y^2 = N \Delta x^2$.

Inbesondere gilt: $\frac{\Delta y}{\langle y \rangle} = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle \sqrt{N}}$ also

Aussagen über y sind für große N scharf.

- Bsp: (i) System mit wechselwirkender Teilchen (z.B. bei Temp T)
 x_i = Energie des i -ten Teilchen
 y = Gesamtenergie

- (ii) Zufallsbewegung („random walk“)
 insbes. Brownsche Bewegung



x_i = Zuwachs beim i -ten (mikroskop.) Schritt
 (z.B. durch Stöße der Flüssigkeitsmoleküle)
 y = Position nach N Schritten



- Beweis:

Führe ein: $z(\{x_i\}) = \sum_i \frac{x_i - \langle x \rangle}{\sqrt{N}} = \frac{y - N \langle x \rangle}{\sqrt{N}}$ (3.34)

Wahrscheinlichkeitsdichte

$$P(z) \stackrel{(3.3)}{=} \langle \delta(z - z(\{x_i\})) \rangle$$

$$= \int dx_1 \dots dx_N w(x_1) \dots w(x_N) \delta\left(z - \frac{x_1 + \dots + x_N}{\sqrt{N}} + \sqrt{N} \langle x \rangle\right)$$

$$\left[\delta(\dots) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik \dots} \right] = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \int dx_1 \dots dx_N w(x_1) \dots w(x_N) e^{-ik \frac{x_1 + \dots + x_N}{\sqrt{N}} + ik \sqrt{N} \langle x \rangle}$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz + i k \sqrt{N} \langle x \rangle} \left[G\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right) \right]^N$$

charakt. Fkt zu $w(x)$

mit $G\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right) \stackrel{(3.16)}{=} \exp\left[-i \frac{k}{\sqrt{N}} \langle x \rangle - \frac{1}{2N} \frac{k^2 \langle x^2 \rangle}{(\Delta x)^2} + i \frac{1}{6N^{3/2}} \langle x^3 \rangle \dots\right]$

$$\ln G(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle_c$$

$$P(z) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz - \frac{1}{2} k^2 \Delta x^2 + i \frac{1}{6} \frac{k^3}{\sqrt{N}} \langle x^3 \rangle_c + \dots}$$

$e^{\dots} = G_p(k) = e^{-\frac{1}{2} k^2 \Delta x^2}$

$$(N \rightarrow \infty) \stackrel{(3.13)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\Delta x)^2} e^{-\frac{z^2}{2(\Delta x)^2}}$$

mit $P(z) dz = P(y) dy$ und $\frac{dz}{dy} \stackrel{(3.24)}{=} \frac{1}{\sqrt{N}}$

$$\rightarrow P(y) \stackrel{(3.36)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi N}(\Delta x)^2} e^{-\frac{(y - N \langle x \rangle)^2}{2N(\Delta x)^2}} \quad \text{qed}$$

- Bem.: (3.33) auch gültig für abhängige x ; unter gewissen Bedingungen.
(von Kaper)

4. Kinetische Theorie der Gase

- Studium der makroskopischen Eigenschaften einer großen Zahl von Teilchen, ausgehend von (klassischen) Bewegungsgleichungen
- Ziele: (i) Einführung der Boltzmann Gl.
(ii) Herleitung makroskopischer Bewegungsgl.
(iii) Motivation des zentralen Postulats der Stat. Mechanik zur Entropie
(iv) Diskussion von Irreversibilität anhand der Boltzmann Gl. und H-Theorem

4.1 Der Liouvillescher Satz und Implikationen

- System von N wechselwirkenden Teilchen
Mechanik: dessen Mikrozustand eindeutig bestimmt durch
Orte $q \equiv \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ und
Impulse $p \equiv \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$
 $\{q, p\} =$ Punkt im $6N$ dimensionalen Phasenraum Γ
- Dynamik: Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad H \dots \text{Hamiltonoperator} \quad (4.1)$$

Zeitumkehrsymmetrie:

$$t \rightarrow -t, \quad p_i \rightarrow -p_i, \quad H(q, p) = H(q, -p)$$

\Rightarrow (4.1) ist zeitumkehrinvariant

\rightarrow zeitumgekehrte Bahnen $q(-t)$ sind auch Lsgn von (4.1)

also: (4.1) beschreiben reversible Vorgänge