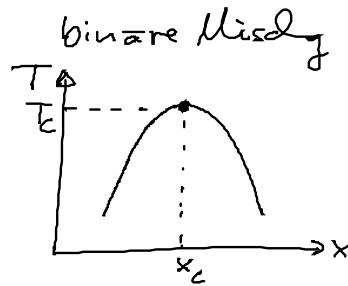
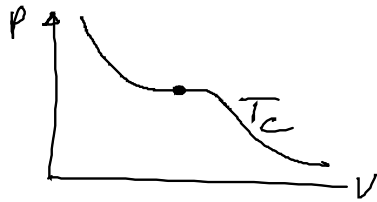


6.7 Theorie der krit. Opaleszenz

- van der Waals:



- Strukturfaktor:

$$\begin{aligned}
 S(k \rightarrow 0) &= 1 + \langle \rho \rangle \int d^3r \frac{h(r)}{g^{-1}} \\
 &= \frac{1}{1 - \langle \rho \rangle c(k \rightarrow 0)} \\
 &= \langle \rho \rangle \chi_T \chi_T \rightarrow \infty \text{ für } T \rightarrow T_c
 \end{aligned} \tag{6.67}$$

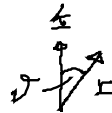
$$c(k \rightarrow 0) = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 c(r) \rightarrow \frac{1}{\langle \rho \rangle} \text{ für } T \rightarrow T_c$$

... $c(r)$ bleibt kurvenbreit für $T \rightarrow T_c$!

- Strukturfaktor $S(k)$ nahe T_c :

(i) Berechne zuerst $c(k)$,

$$\rho c(k) = \rho \int d^3r e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} c(r)$$



$$\begin{aligned}
 &\left\{ \begin{aligned}
 &2\pi \int d\cos\vartheta \int dr r^2 e^{-ikr\cos\vartheta} c(r) \\
 &= 2\pi \int dr r^2 \frac{1}{-ikr} e^{-ikr\cos\vartheta} c(r) \\
 &= 2\pi \int dr r^2 \frac{1}{ikr} (e^{-ikr} - e^{ikr}) c(r) \\
 &= 4\pi \int dr r^2 \frac{\sin kr}{kr} c(r)
 \end{aligned} \right. \\
 &= 4\pi \rho \int_{-\infty}^{\infty} dr r^2 \frac{\sin kr}{kr} c(r)
 \end{aligned}$$

mit $\frac{\sin kr}{kr} \approx 1 - \frac{(kr)^2}{6} + O((kr)^4)$

$[\sin x = x - \frac{x^3}{3!}]$

$$g_c(k) = c_0 - c_2 k^2 + O(k^4) \stackrel{(6.53a)}{\leq} 1$$

mit $c_0 = g_c(k=0) = 4\pi g \int_0^\infty dr r^2 c(r)$

$\rightarrow 1$ für $T \rightarrow T_c$

$$c_2 = \frac{2\pi}{3} g \int_0^\infty dr r^4 c(r)$$

NB: i.f. Annahme: $c_2 > 0$

[gilt falls $v(r) < 0$ genügend weitreichend ist,
dann $c(r) = -\beta v(r)$ für $r \rightarrow \infty$]

(ii) mit $S(k) = \frac{1}{1-g_c(k)} \approx \frac{1}{1-c_0 + c_2 k^2}$

$$\rightarrow S(k) = \frac{1}{c_2} \frac{1}{\frac{c_0}{c_2} - k^2}$$

mit $\xi(T) = \left(\frac{c_2}{1-c_0}\right)^{1/2} \rightarrow \infty, T \rightarrow T_c$ (6.70)

$$= [c_2 S(k=0)]^{1/2} \stackrel{(6.53)}{=} \left(c_2 \frac{\chi_T}{\chi_T^a}\right)^{1/2}$$

... Korrelationslänge

... Ornstein-Zernike-Form von $S(k)$
nahe T_c für kleine k (x 1314)

• Bemerkungen:

(1) Annahme: $\chi_T \sim (T-T_c)^{-\nu}$ für $T \rightarrow T_c$

$$\rightarrow \xi(T) \sim (T-T_c)^{-\nu/2} \text{ für } T \rightarrow T_c \quad (6.71)$$

ν ... kritischer Exponent!

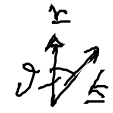
hier: Universalitätsklasse des Flüssig-Gas-
Phaseübergangs

Wert: Landau-Theorie: $\nu = 1$

Experiment & Renormierungsgruppen Theorie

für kritische Phänomene: $\nu = 1,24$

(2) Deutung von ξ :

$$h(r) \stackrel{(6.74)}{=} \frac{1}{\xi} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} [S(\mathbf{k}) - 1]$$


a.B. \rightarrow
$$h(r) \stackrel{(6.70)}{\approx} \frac{1}{4\pi g c_2} \frac{e^{-r/\xi}}{r} \left[\frac{1}{3} S(r) \right]$$

... Yukawa-Form der Korrelationen
mit Reichweite ξ !

(3) bei $T = T_c$:

$$\xi \rightarrow \infty \rightarrow h(r) \Big|_{T_c} \sim \frac{1}{r} \quad \text{bzw.} \quad S(k) \Big|_{T_c} \sim \frac{1}{k^2}$$

... algebraischer Abfall
 \equiv weitreichende Korrelationen!

• Messung von $S(k)$:
für Steinhilfsfunktion $I(k)$ gilt:

$$\frac{1}{I(k)} \stackrel{(6.68)}{\sim} \frac{1}{S(k)} = c_2 \left(\xi^{-2} + k^2 \right) \quad (6.74)$$

bestätigt durch Experiment! Bsp. Argon

• sehr nahe bei T_c und sehr kleine k :

Abweichung von (6.74) im Experiment:

Renormierungsgruppen-Theorie:

$$\rightarrow h(r) \Big|_{T_c} \sim \frac{1}{r^{1+\eta}} \quad \text{mit } \eta = 0.04 \quad (6.75)$$

$$S(k) \Big|_{T_c} \sim \frac{1}{k^{2-\eta}}$$

7. Theorie der linearen Antwort & Fluktuations- Dissipations Theorem

- Lit.: 1. David Chandler, Introduction to Modern Statistical Mechanics
- 2. Hansen & McDonald
- 3. Original lit.: R. Kubo, J. Phys. Soc. Jap. 12, 570 (1957)

• Motivation:

Dynamik eines Systems
nahe am thermischen GG
Antwort \approx einwirkende
Kraft
 $x = \chi F$



Eigenschaft des Systems
im thermischen GG
 $\langle x(0)x(t) \rangle$
... Zeit Korrelationsfkt



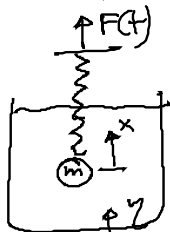
$\langle \dots \rangle$ über viele Realisierungen
von $x(t)$ im thermischen GG

NB: Ergodische Hypothese τ

$$\langle x(0)x(t) \rangle = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} x(t')x(t'+t) dt'$$

• vereinfachte Version der
Ableitung der Theorie der L.A.

7.1 Modell system harmonischer Oszillator



viskose Flüssigkeit
(Wärmebad)

Newtonsche Grundgleichung:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + m\omega_0^2 x = F(t) \quad (7.1)$$

$\alpha = 6\pi\eta a$... Stokes'sche Reibungskoeff.
 a ... Radius der Kugel

ω_0 ... Eigenfrequenz

- Behandle im Komplexen: $x \in \mathbb{C}$
- Lösung von (7.1) für harmonische Kraft:

$$F(t) = F(\omega) e^{-i\omega t}$$
- Lsg. Ansatz: $x(t) = x(\omega) e^{-i\omega t} \} \rightarrow (7.1) \text{ mit } \frac{\kappa}{m} = 2\gamma$

$$\rightarrow m(-\omega^2 - 2\gamma i\omega + \omega_0^2) x(\omega) = F(\omega)$$

$$x(\omega) = \chi(\omega) F(\omega)$$

$$\text{mit } \chi(\omega) = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma)} \quad (7.2)$$

$$= \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$$

... dynamische Suszeptibilität
Antwortfunktion

NB: $[Fx] = \text{Energie}$

- Grenzfunktion:

$$\left. \begin{array}{l} \text{bel. Kraft: } F(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) e^{-i\omega t} \\ \text{Ansatz: } x(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} x(\omega) e^{-i\omega t} \end{array} \right\} \text{Fouriertrafo (FT)}$$

(7.2) Faltungssatz der FT \rightarrow

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-t') F(t') dt' \quad (7.3)$$

$$\text{mit } \chi(\tau) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \chi(\omega) e^{-i\omega\tau}$$

... Grenzfunktion von (7.1)

- Bew: (i) $\chi(\tau)$ ist Lsg. von (7.1) für $F(t') = \delta(t')$
- (ii) Kausalität: $\chi(\tau) = 0$ für $\tau < 0$