# 4. Stokes-Gleichungen

- wichtig für Welt der kleinen Reynoldszahlen
- " für Strömungsfelder auf Mikro-/Nanometerskala, insbesondere Mikro-/Nanofluidik!

- Voraussetzungen:

$$Re = \frac{\varrho a v_0}{\eta} \ll 1 \xrightarrow{(3.68)} \text{vernachlässige } \underline{v} \cdot \underline{\nabla}\, \underline{v}$$

$$\longrightarrow \quad " \quad \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}$$

auf Zeiten $t \gg \tau_H = \frac{l_H^2}{6\eta/\varrho}$

$\longrightarrow$ stationäres Geschw. feld auf Länge $l_H$

$\operatorname{div} \underline{v} = 0 \longrightarrow$ inkompressible Flüssigkeit

$$\longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \underline{0} &= -\underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v} \quad (+\varrho \underline{b}) \\ 0 &= \operatorname{div} \underline{v} \end{aligned}} \quad (4.1)$$

auch: „creeping-flow" Gleichungen

## 4.1 Extremalprinzip

- wichtiges Prinzip in Physik!
- hier: dissipierte Energie pro Zeiteinheit $W = T\dot{\sigma}$ für $T =$ konst.:

$$\boxed{W \overset{(3.63)}{=} \int \mathrm{Sp}\, \underline{\underline{T}}' \underline{\underline{A}}\, d^3x \underset{\substack{\underline{\underline{T}}' = 2\eta \underline{\underline{A}} \\ [\mathrm{Sp} \underline{\underline{A}} = 0]}}{=} 2\eta \int \mathrm{Sp}\, \underline{\underline{A}}^2\, d^3x = 2\eta \int A_{ij}^2\, d^3x} \quad (4.2)$$

- Extremalprinzip: unter Nebenbedingung $\operatorname{div} \underline{v} = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} &\delta\Big(W - 2\int_V p \operatorname{div} \underline{v}\, d^3x\Big) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad 0 = -\underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v} \\ &\text{Druck } p = \text{Lagrangeparameter} \qquad \text{Randbedingung:} \\ &\qquad\qquad 1.\ \underline{v} = 0 \ldots \text{haftend} \\ &\qquad\qquad \text{oder } 2.\ T_{ij} n_j \big|_{\partial V} = 0 \end{aligned}} \quad (4.3)$$

„Oberfläche ist kräftefrei"

Beweis: s. Übungen

$\boxed{\text{stationäre Strömungsprofile stellen sich so ein, daß } W \text{ ein Extremum annimmt}}$

## 4.2 Biharmonische Gleichung

- Herleitung:

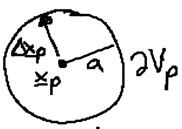
$$\operatorname{div}\left(\underline{0} = -\underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v}\right) \xrightarrow{\operatorname{div} \underline{v} = 0}$$

$$\nabla^2 \left( \;\; \ldots\ldots \;\; \right) \xrightarrow{(4.4a)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\nabla}^2 p &= 0 \qquad (4.4a) \\ \underline{\nabla}^2 \underline{\nabla}^2 \underline{v} &= 0 \qquad (4.4b) \end{aligned}}$$

NB: separate Gln. für $\underline{v}$ und $p$!

- Hilfssatz:




Kugel

$$\boxed{\begin{gathered} \text{Oberflächenintegral:} \quad \underline{v}(\underline{x}) \text{ löse Stokes-Gln. (4.1)} \\ \frac{1}{4\pi a^2} \oint_{\partial V_p} \underline{v}(\underline{x})\, df = \left(1 + \tfrac{1}{6} a^2 \underline{\nabla}_p^2\right) \underline{v}(\underline{x}_p) \end{gathered}} \qquad (4.5)$$

Beweis: verwendet Gl. (4.4b)

(1) Taylor $\xrightarrow[\underline{x} - \underline{x}_p]{\Delta \underline{x}_p =}$

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}(\underline{x}_p) + \Delta\underline{x}_p \cdot \underline{\nabla}_p\, \underline{v}(\underline{x}_p) + \frac{1}{2} (\Delta\underline{x}_p \otimes \Delta\underline{x}_p) \cdot (\underline{\nabla}_p \otimes \underline{\nabla}_p)\, \underline{v}(\underline{x}_p)$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!}\, \text{"}(\Delta \underline{x}_p)^n \cdot \underline{\nabla}_p^n\text{"}\; \underline{v}(\underline{x}_p)$$

(2) $\frac{1}{4\pi a^2} \int \underline{v}(\underline{x})\, df \longrightarrow$

(i) $\int (\Delta \underline{x}_p)^n df = 0$, $n$ ungerade
[$\Delta\underline{x}_p$ und $-\Delta\underline{x}_p$ kommen vor]

(ii) $\underbrace{\int (\Delta\underline{x}_p \otimes \Delta\underline{x}_p)\, df}_{\text{denn: } = c\, \underline{1}} = \frac{4\pi}{3} a^4\, \underline{1}$

denn: $= c\,\underline{1}$, wegen Isotropie der Oberfläche,
keine Richtung ist ausgezeichnet

$\left[ (\Delta \underline{x}_p)_i (\Delta \underline{x}_p)_j \overset{i=j}{\to} (\Delta\underline{x}_p)_i^2 = |\Delta\underline{x}_p|^2 = a^2 \right]$

$\xrightarrow{Sp(\ldots)} 3c = a^2 \int_{\partial V} df = 4\pi a^4$

$\longrightarrow \quad c = \frac{4\pi}{3} a^4$

(iii) $\int (\underbrace{\Delta\underline{x}_p \otimes \Delta\underline{x}_p \otimes \ldots}_{n\text{-mal}})\, df \underset{\text{Isotropie}}{\sim} \underline{1}^{n/2} = \underline{1} \otimes \underline{1} \otimes \ldots$

in (1) $\;\ldots \underline{\nabla}_p^2 \underline{\nabla}_p^2 \ldots \underline{v}(\underline{x}_p) = 0$

(1) & (2) $\longrightarrow$ (4.5)

## 4.3 Oseen-Tensor

- (4.1) = lineare Dgl. in $\underline{v}$ und $p$ $\longrightarrow$ Methode der Greenschen Funktion (Superpositionsprinzip!)

$\longrightarrow$ Lsg. von (4.1) für vorgegebenes $\underline{\varrho b}(\underline{x})$:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{v}(\underline{x}) &= \int d^3x' \; \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')\, \varrho \underline{b}(\underline{x}') \\ p(\underline{x}) &= \int d^3x' \; \underline{g}(\underline{x}-\underline{x}') \cdot \varrho \underline{b}(\underline{x}') \end{aligned}} \quad (4.6)$$

mit $\left.\begin{array}{l} \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}') \text{ ... Oseen Tensor} \\ \underline{g}(\underline{x}-\underline{x}') \text{ ... Druck-Vektor} \end{array}\right\}$ Greensche Funktionen

<u>NB:</u> (i) $\underline{\underline{O}}$ ... Tensor 2. Stufe
(ii) $\underline{g}$ ... Vektor

- Bestimmungsgln. für $\underline{\underline{O}}$ und $\underline{g}$:

(4.6) in (4.1)

$$\longrightarrow \begin{cases} \underline{0} = \int d^3x' \left\{ -\underline{\nabla}\left[\underline{g}(\underline{x}-\underline{x}') \cdot \varrho \underline{b}(\underline{x}')\right] + \eta \underline{\nabla}^2 \left[\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')\varrho \underline{b}(\underline{x}')\right] \right\} + \varrho \underline{b}(\underline{x}) \\ 0 = \int d^3x' \operatorname{div}\left[\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')\varrho \underline{b}(\underline{x}')\right] \end{cases}$$

$$\xrightarrow[= \underline{e}\,\delta(\underline{x}')]{\varrho \underline{b}(\underline{x}')} \begin{cases} \underline{0} = -\underline{\nabla}\left[\underline{g}(\underline{x}) \cdot \underline{e}\right] + \eta \underline{\nabla}^2 \left[\underline{\underline{O}}(\underline{x})\, \underline{e}\right] + \underline{e}\, \delta(\underline{x}) \\ 0 = \operatorname{div}\left[\underline{\underline{O}}(\underline{x})\, \underline{e}\right] \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\underline{e} \text{ beliebig}} \boxed{\begin{aligned} \underline{\nabla} \otimes \underline{g}(\underline{x}) - \eta \underline{\nabla}^2 \underline{\underline{O}}(\underline{x}) &= \underline{\underline{1}}\, \delta(\underline{x}) \quad (4.7a) \\ \operatorname{div} \underline{\underline{O}}^t &= \underline{0} \quad (4.7b) \end{aligned}}$$

- Lösung: für $V \to \infty$, $\underline{v}\big|_{\partial V} = 0$ ... unendliches Volumen

(i) Druck-Vektor $\underline{g}$:

$\operatorname{div}\left[(4.7a)^t\right]$ & $\operatorname{div} \underline{\underline{O}}^t = 0$

„mit $\underline{\nabla}$ kontrahieren"

$$\longrightarrow \quad \underline{\nabla}^2 \underline{g}(\underline{x}) = \underline{\nabla}\, \delta(\underline{x}) \quad (4.8)$$

Einschub: Elektrostatik $\quad \underline{\nabla}^2 \frac{1}{r} \overset{(4.9)}{=} -4\pi\, \delta(\underline{x}), \quad r = |\underline{x}|$

Greensche Fkt. der Poisson-Gl.

$\nabla$(4.9) & vgl. mit (4.8)

$$\longrightarrow \quad \boxed{\underline{g}(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi}\underline{\nabla}\frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi}\frac{\underline{x}}{r^3}} \quad (4.10)$$

... „Dipol"

Beweis: $\underline{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\underbrace{\underline{\nabla} r}_{\hat{\underline{x}} = \frac{\underline{x}}{r}} = -\frac{\underline{x}}{r^3}$ qed

(ii) Oseen-Tensor $\underline{\underline{O}}$:

(4.10) in (4.7a)

$$-\frac{1}{4\pi}(\underline{\nabla}\otimes\underline{\nabla})\frac{1}{r} - \eta \underline{\nabla}^2 \underline{\underline{O}}(\underline{x}) = \underline{\underline{1}}\,\delta(\underline{x}) \quad (4.11)$$

Ansatz: $\underline{\underline{O}}(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\eta}\left(\frac{1}{r}\underline{\underline{1}} + \tilde{\underline{\underline{O}}}\right)$ (4.12)

$\xrightarrow{\text{in (4.11)}}$ $-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{r} = \delta(\underline{x})$

$$\underline{\nabla}^2\tilde{\underline{\underline{O}}}(\underline{x}) = -(\underline{\nabla}\otimes\underline{\nabla})\frac{1}{r} \overset{\text{o.B.}}{=} \frac{1}{r^3}\underline{\underline{1}} - 3\frac{\underline{x}\otimes\underline{x}}{r^5} \quad (4.13)$$

Ansatz: $\tilde{\underline{\underline{O}}} = \frac{1}{r}\left(c_1\underline{\underline{1}} + c_2\frac{\underline{x}\otimes\underline{x}}{r^2}\right)$ in (4.13)

$$\longrightarrow \quad \tilde{\underline{\underline{O}}} = \frac{1}{2r}\left(\frac{\underline{x}\otimes\underline{x}}{r^2} - \underline{\underline{1}}\right) \quad (4.14)$$

(4.12) & (4.14) $\longrightarrow$

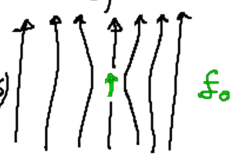
$$\boxed{\underline{\underline{O}}(\underline{x}) = \frac{1}{8\pi\eta r}\left(\underline{\underline{1}} + \frac{\underline{x}\otimes\underline{x}}{r^2}\right)} \quad (4.15)$$

... Oseen-Tensor

- Geschw.feld einer „Punktquelle": $\underline{f}^b(\underline{x}) = \underline{f}_0\,\delta(\underline{x}-\underline{x}_0)$

in (4.6) $\longrightarrow$ $\boxed{\underline{v}(\underline{x}) = \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}_0)\,\underline{f}_0}$ (4.16)

[$\underline{v}(\underline{x}) = \int \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')\underline{f}^b(\underline{x}')\,d^3x'$]




... „Stokeslet"

Anisotropie:

(i) $\underline{x}-\underline{x}_0 \parallel \underline{f}_0 \longrightarrow \underline{v} = \frac{\underline{f}_0}{4\pi\eta r}$, $r = |\underline{x}-\underline{x}_0|$

(ii) $\underline{x}-\underline{x}_0 \perp \underline{f}_0 \longrightarrow \underline{v} = \frac{\underline{f}_0}{8\pi\eta r}$

NB: allgemein: $\underline{v}(\underline{x})$ = Superposition von Stokeslets

- wichtige Anwendung: hydrodynam. Wechselwirkungen (HW) s. Kap. 6