3. Hydrodynamik Newtonscher Flüssigkeiten

3.1 Kinematik

a) materielle und räumliche Koordinaten

$$\underline{\xi} \quad \& \quad \underline{x} = \underline{x}(\underline{\xi}, t)$$

b) Konvektionsformel: $\varphi(\underline{x}, t)$

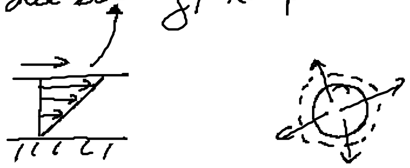
totale Zeitableitung:

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \varphi} \quad (3.3)$$

... Konvektionsformel

c) Deformationsrate

• Ziel: Variable, die Scherung / Dilatation Kompression von Flüssigkeit erfaßt



(i) Geschwindigkeitsgradient:

• Betrachte

Tangentialvektor:

$$\underline{a}_0 = \frac{\partial}{\partial s} \underline{\xi}(s) \longrightarrow \underline{a} = \frac{\partial}{\partial s} \underline{x}(\underline{\xi}(s)) \quad \text{mit} \quad a_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \underbrace{\frac{\partial \xi_j}{\partial s}}_{[\underline{a}_0]_j} \quad (3.4)$$

• Führe ein:

$$\boxed{\underline{\underline{F}} \quad \text{mit} \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}} \quad (3.5)$$

... Jacobische Matrix

also: $(3.4) \longrightarrow \boxed{\underline{a} = \underline{\underline{F}}\, \underline{a}_0}$ (3.6)

• Betrachte: $\frac{d}{dt}\underline{a} \overset{(3.6)}{=} \frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial t}\, \underline{a}_0$

$$\overset{(3.6)}{=} \underbrace{\frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial t}\, \underline{\underline{F}}^{-1}}_{\underline{\underline{L}}}\, \underline{a} \qquad \text{mit} \quad (\underline{\underline{F}}^{-1})_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \qquad \left(\text{Zeige durch Berechnung von } \underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{1}}\right)$$

in Komponenten:

$$L_{ij} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\right)\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_k}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} x_i\right)}_{v_i}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \nabla_j v_i$$

also:

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{d}{dt}\underline{a} = \underline{\underline{L}}\,\underline{a} \\ \text{mit } L_{ij} = \nabla_j v_i\end{gathered}} \qquad (3.7)$$

... Geschwindigkeitsgradient

• Zerlegung:

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{\underline{L}} &= \tfrac{1}{2}(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^t) + \tfrac{1}{2}(\underline{\underline{L}} - \underline{\underline{L}}^t) \\ &= \quad \underline{\underline{A}} \quad + \quad \underline{\underline{W}}\end{aligned}} \qquad (3.8)$$

$A_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j)$ ... Deformationsrate = Verzerrungsgeschw. tensor

$W_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i - \nabla_i v_j)$ ... Drehgeschwindigkeitstensor

(ii) Bedeutung von $\underline{\underline{W}}$

• $\underline{\underline{W}}$ ist antisymmetrisch: $\quad \underline{\underline{W}} = \begin{pmatrix} 0 & W_{12} & W_{13} \\ -W_{12} & 0 & W_{23} \\ -W_{13} & -W_{23} & 0 \end{pmatrix}$

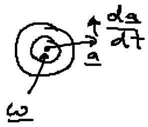
• Führe ein:

$$\boxed{\begin{gathered}\underline{\omega} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\underline{v} \\ \text{mit } \omega_i = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\underbrace{\nabla_j v_k}_{\frac{1}{2}(\nabla_j v_k - \nabla_k v_j)} = -\tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,W_{jk}\end{gathered}} \qquad (3.9)$$

... Drehvektor
Vortex in Flüssigkeit

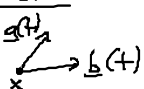
denn es gilt: $\boxed{\underline{\omega} \times \underline{a} = \underline{\underline{W}}\,\underline{a}}$ (3.10) ... Drehung von $\underline{a}$

Beweis: selber



(iii) Deformationsrate

• Betrachte:



• zeitliche Änderung von $\underline{a}\cdot\underline{b}$?

$$\frac{d}{dt}(\underline{a}\cdot\underline{b}) = \dot{\underline{a}}\cdot\underline{b} + \underline{a}\cdot\dot{\underline{b}} \overset{(3.7)}{=} \underbrace{\underline{\underline{L}}\,\underline{a}\cdot}_{\underline{\underline{L}}^T}\underline{b} + \underline{a}\cdot\underline{\underline{L}}\,\underline{b}$$

$$= \underline{a}\cdot(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T)\,\underline{b}$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(\underline{a}\cdot\underline{b}) \overset{(3.8)}{=} 2\,\underline{a}\cdot\underline{\underline{A}}\,\underline{b}} \qquad (3.11)$$

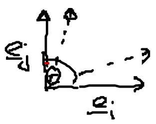
• Interpretation von $\underline{\underline{A}}$: mit $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ ... Koordinatenbasis

(1) $\underline{a} = \underline{b} = a\,\underline{e}_i \xrightarrow{(3.11)} 2a\dot{a} = 2a^2 A_{ii}$

$$\longrightarrow \boxed{A_{ii} = \frac{\dot{a}}{a}} \qquad (3.12)$$

... relative Dehngeschwindigkeit von Längen entlang $\underline{e}_i$

(2) $\underline{a} = \underline{e}_i$, $\underline{b} = \underline{e}_j \xrightarrow{(3.11)} \underbrace{\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{|\underline{e}_i|}_{1}\cdot\underbrace{|\underline{e}_j|}_{1}\cos\Theta\Big)}_{-\sin\Theta\,\dot{\Theta}|_{\Theta=\frac{\pi}{2}}}\Big|_{\Theta=\frac{\pi}{2}} = 2A_{ij}$

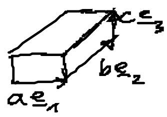


$$\longrightarrow \boxed{A_{ij} = -\frac{1}{2}\dot{\Theta}} \qquad (3.13)$$

... halbe Änderungsgeschwindigkeit rechter Winkel $\hat{=}$ Scherrate

(3) Kompressionsrate:

Quadervolumen: $V = abc$



Betrachte: $\frac{\dot{V}}{V} = \frac{(abc)^{\cdot}}{abc} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} = \underbrace{A_{11} + A_{22} + A_{33}}_{\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}}} = \nabla_1 v_1 + \nabla_2 v_2 + \nabla_3 v_3$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\dot{V}}{V} = \mathrm{div}\,\underline{v} = \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}}} \qquad (3.14)$$

Kompressionsrate /-geschw.
Dilatationsrate /-geschw.

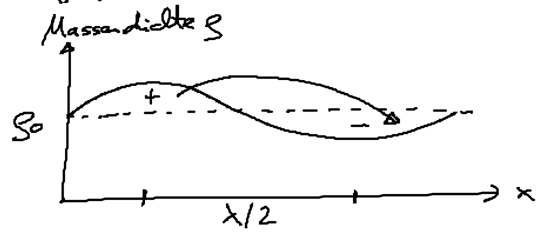
3.2. Einordnung: hydrodynamische Variable

- Ges: Bewegungsgleichungen für Kontinua, insbes. zähe Flüssigkeiten
- jedes System:
  aufgebaut durch Atome: Kollisionen mit mittlerer stoßfreier Zeit τ_c
  $\longrightarrow$ lokales therm. GG $\hat{=}$ Thermodynamik lokal anwendbar
- hier: Dynamik von Kontinua auf Längenskala $\gg$ Atomabstände
  " " " " Zeiten τ_H $\gg$ τ_c

also: langsame kollektive Dynamik
$\longrightarrow$ hydrodynamische Variable:

(1) Erhaltungsgröße: Masse, Impuls, Energie

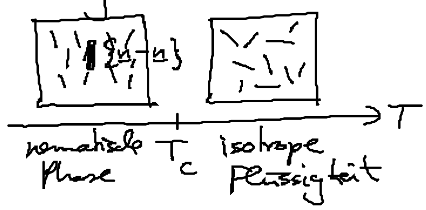
Grd.:



$$\boxed{\text{Ausgleich der Inhomogenität auf Zeiten } \tau \longrightarrow \infty \text{ für } \lambda \longrightarrow \infty}$$

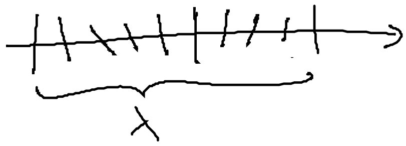
(2) Variable, die gebrochene kontinuierliche Symmetrie beschreiben („Goldstone-Moden")

Bsp: Flüssigkristalle



$\underline{n}$ ... Direktor

elastische Deformation



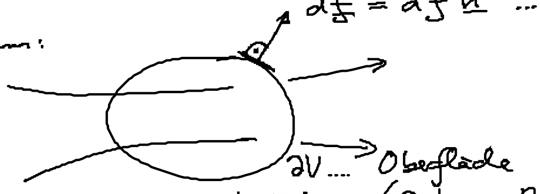
$$\boxed{\text{Relaxationszeiten } \tau \longrightarrow \infty \text{ für } \lambda \longrightarrow \infty}$$

Grd.: Rotation des gesamten Systems kostet keine Energie

Wegweiser: s. Folie

3.3 Massenbilanz

• Kontinuum:



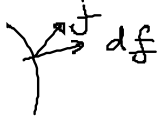
• Gesamtmasse:

$$M(t) = \int_V \rho(\underline{x},t)\,d^3x$$

Massendichte

• Massenerhaltung:

$$\frac{dM}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{x},t)\,d^3x = -\underbrace{\int_{\partial V} \underline{j}(\underline{x},t)\cdot d\underline{f}}_{\substack{\text{Masse, die durch}\\ \text{die Oberfläche raus-}\\ \text{fließt pro Zeiteinheit}\\ \text{[s.u.]}}} \overset{\text{Gauss}}{=} -\int_V \mathrm{div}\,\underline{j}\,d^3x$$

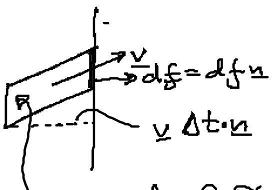


V beliebig $\longrightarrow$ $\boxed{\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\underline{j} = 0}$ (3.15a)

... Kontinuitätsgleichung
Erhaltungssatz ρ = Masse

mit $\boxed{\underline{j} = \rho\,\underline{v} \text{ .... Massenstromdichte} = \text{Dichte Erhaltungsgröße} \times \text{Geschw.}}$ (3.15b)

Beweis:



Masse durch Fläche df in Zeit Δt

$$\rho\,\Delta V = \rho\,\underline{v}\,\Delta t\cdot\underline{n}\,df = \rho\,\underline{v}\,\Delta t\cdot d\underline{f} \longrightarrow \frac{\rho\,\Delta V}{\Delta t} = \underbrace{\rho\,\underline{v}}_{\underline{j}}\cdot d\underline{f}$$

• (3.15a) ... gültig für alle Erhaltungsgrößen
(3.15b) ... „konvektiver" Anteil von $\underline{j}$

• inkompressible Flüssigkeit: $\dfrac{d\rho}{dt} = 0$ (3.17)

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\varrho = \underbrace{\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\varrho\underline{v})}_{=0\ (3.15a)} - \varrho\,\underline{\nabla}\cdot\underline{v} \longrightarrow \boxed{\operatorname{div}\underline{v} = 0} \qquad (3.16)$$