2. Vektor- und Tensorrechnung

· Motivation:
Grundlagen der Vektor-/Tensorrechnung wiederholen,
wichtig für Kontinuumstheorie

2.1 Grundlagen des Euklidischen Raumes

a) physikal. Anschauungsraum

· im folgenden:

$$\boxed{\text{Physikal. Anschauungsraum } A = \text{euklidischer Raum} = \text{flacher Raum}} \quad (2.1)$$

→ euklidische Geometrie gilt:

Bsp: (i) Winkelsumme im Dreieck $= 180°$

(ii) Satz von Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

(iii) Parallelenaxiom:

· Unterscheide:

(i) physikal. Anschauungsraum A mit Punkte P

(ii) Vektorraum V_P („Tangentialraum"), angeheftet an jedem P,
in dem die physikal. Vektoren wirken

– gekrümmte Räume: Bsp:

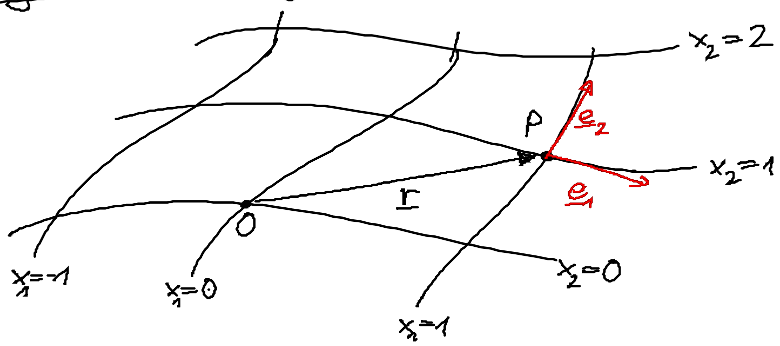
– flacher Raum: Pkte. in A definieren Vektoren [s. Def. (2.2)]
→ Unterschied künstlich!

· Def.: affiner Raum } s. Folien
euklidischer "

b) Koordinatensysteme

- Motivation: Koordinaten von Pktn. P, für Beschreibung von Skalar-, Vektor-, Tensorfelder
- Ort von Pkt P $\longleftrightarrow$ Koordinatentripel: (x_1, x_2, x_3)

(i) allgemeine (krummlinige) Koordinaten:



Ort von P: (x_1, x_2, x_3) mit Ortsvektor $\underline{r} = \overrightarrow{OP}$ $[\in V!!]$

- natürliche (Koordinaten) Basis für V_p angeheftet an P:
  normierte Tangentialvektoren $\underline{e}_i$ an x_i-Linien (x_j = konst., $j \neq i$)
  also: $$\boxed{\underline{e}_i = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right|^{-1} \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}} \quad (2.5)$$

  mit $|\underline{e}_i| = 1$, i.a. $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j \neq 0$ und $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ ortsfest

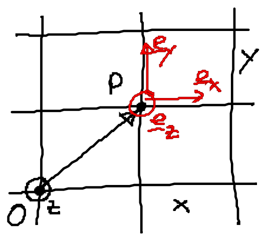
  $$\longrightarrow \boxed{\Gamma^{i}_{kl} = \underline{e}_i \cdot \frac{\partial \underline{e}_k}{\partial x_l}} \quad (2.6)$$

  ... „Konnexionskoeff."

NB: (1) i.f. $\boxed{\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}}$ (2.7), also Orthonormalbasis (ONB)

(2) in ART: $\underline{e}_i = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}$

(ii) kartesische Koord.



P: (x, y, z)

- $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$ ortsfest
  $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$ $\quad i,j = x,y,z$

$$\left.\right\} \longrightarrow \quad \underline{r} = x_i \underline{e}_i = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \Gamma^{i}_{kl} = 0! \quad (2.8)$$

(iii) Zylinderkoordinaten: s. Folie

(iv) Kugelkoord. s. Übung

2.2 Tensoren 2. Stufe

a) Einordnung:

Tensoren 0. Stufe $\equiv$ Skalare

" 1. Stufe = Vektoren $\underline{a} \in V_p$

$$\underline{a} = \sum_i a_i \underline{e}_i = a_i \underline{e}_i \quad \text{mit } \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} \text{ ... ONB in } V_p \qquad (2.14)$$

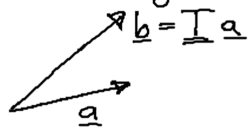
Schreibweise:

$$\underline{a} = \begin{cases} \text{Vektor} \\ \text{Matrixdarstellung: } \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

jetzt Tensor 2. Stufe

b) Definitionen & dyadisches Produkt

Def: Tensoren 2. Stufe vermitteln eine lineare Abbildung von V_p in sich:



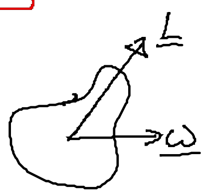
$\underline{\underline{I}}: \; V_p \to V_p$

$\underline{\underline{I}}: \; \underline{a} \to \underline{b} := \underline{\underline{I}}\,\underline{a}, \quad \underline{a}, \underline{b} \in V_p$

Linearität: $\underline{\underline{I}}(p\underline{a} + q\underline{b}) = p\underline{\underline{I}}\,\underline{a} + q\underline{\underline{I}}\,\underline{b}, \quad p, q \in \mathbb{R}$ (2.15)

• Bsp1: starrer Körper: $\underline{L} = \underline{\underline{\Theta}}\;\underline{\omega}$

Drehimpuls, Trägheitstensor, Winkelgeschw.



Bsp2: Spannungstensor: charakterisiert Material ($\to$ Kapitel 3)

[Herkunft des Wortes: Tensor (lat. tendo: ich spanne)

• Komponenten von $\underline{\underline{I}}$ bzgl. Basis in V_p: $\longrightarrow$ Rechnen

$$\underline{e}_i \cdot \Big| \; \underline{b} = \underline{\underline{I}}\,\underline{a} \longrightarrow b_i = \underline{e}_i \cdot \underline{b} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{I}}\,\underline{a} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{I}}\,(a_j \underline{e}_j)$$

$$\xrightarrow{\text{Linearität}} \quad b_i = (\underline{e}_i \cdot \underline{\underline{I}}\,\underline{e}_j)\, a_j$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{T_{ij} := \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\, \underline{e}_j} \quad (2.16)$$

... Komponenten von $\underline{\underline{T}}$

$$\longrightarrow \quad \boxed{b_i = T_{ij}\, a_j} \quad (2.17)$$

Schreibweise:

$\underline{\underline{T}}$ $\begin{cases} \text{Tensor 2. Stufe} \\ \text{Matrixdarstellung:} \quad \underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{31} & \cdots & T_{33} \end{pmatrix} \end{cases}$

also: $\underline{b} = \underline{\underline{T}}\, \underline{a}$ $\begin{cases} \text{lineare Abbildung: darstellungsfrei} \\ \text{in Matrixschreibweise} \end{cases}$

· Def:

Das Tensor-/dyadische Produkt von $\underline{a}, \underline{b} \in V_p$:

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \in V_p \times V_p \quad \text{(Produktraum)}$$

besitzt die Eigenschaften: (2.18)

1. Bilinearität: $\underline{a} \otimes \underline{b} = (a_i \underline{e}_i) \otimes (b_j \underline{e}_j)$
$$= a_i b_j\, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$$

2. lineare Abbildung:
$$(\underline{a} \otimes \underline{b})\, \underline{c} := \underline{a}\, (\underline{b} \cdot \underline{c}) \in V_p$$

· (2.18) legt nahe:

Satz: Tensoren 2. Stufe sind Elemente des Produktraumes $V \times V$, der durch die Basistensoren $\{\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j,\ i,j = 1,2,3\}$ aufgespannt wird: (2.19)

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

... Entwicklung von $\underline{\underline{T}}$ nach Basis!

[vgl. $\underline{a} = a_i \underline{e}_i$]

Beweis: (2.16) $T_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\, \underline{e}_j \overset{(2.19)}{=} \underline{e}_i \cdot (T_{kl}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l)\, \underline{e}_j$

$$= T_{kl}\, \underline{e}_i \cdot (\underline{e}_k \otimes \underline{e}_l)\, \underline{e}_j = T_{kl}\, \underbrace{\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k}_{\delta_{ik}}\ \underbrace{\underline{e}_l \cdot \underline{e}_j}_{\delta_{lj}} = T_{ij} \checkmark$$

NB: $\boxed{(\underline{a}\otimes\underline{b})_{ij} \overset{(2.18)}{=} a_i b_j}$ (2.20) $\quad \delta_{ik} \quad \delta_{ij}$

c) Spezielle Tensoren:

· transponierte Tensor: $\underline{\underline{T}}^t$:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{a}\cdot\underline{\underline{T}}\,\underline{b} &= \underline{b}\cdot\underline{\underline{T}}^t\underline{a} \\ T_{ji} &= (\underline{\underline{T}}^t)_{ij} \end{aligned}} \quad (2.21)$$

$\xrightarrow[\underline{b}=\underline{e}_i]{\underline{a}=\underline{e}_j}$ (2.16)

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots \\ T_{21} & T_{22} & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{\underline{T}}^t = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & \cdots \\ T_{12} & T_{22} & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

· allg. Tensor 2. Stufe (in 3 Dim.): $3\times 3 = 9$ unabh. Komponente

symmetrischer Tensor:

$$\boxed{\underline{\underline{T}}^t = \underline{\underline{T}} \xrightarrow{(2.21)} T_{ji} = T_{ij}} \quad (2.22)$$

... 6 unab. Komp. $T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{12}, T_{13}, T_{23}$

Bsp: Spannungstensor

antisymmetr. Tensor

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{\underline{T}}^t = -\underline{\underline{T}} \xrightarrow{(2.21)} T_{ji} = -T_{ij} \\ &\longrightarrow T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0 \end{aligned}} \quad (2.23)$$

... 3 unabh. Komp. T_{12}, T_{13}, T_{23}

Bsp: $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r} = \underline{\underline{\Omega}}\,\underline{r}$ mit $\Omega_{ij} = \varepsilon_{ikj}\,\omega_k$

$v_i = \varepsilon_{ikj}\,\omega_k\, r_j$

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$