# 3.13 Hydrodynamische Moden

- Motivation

  5 Erhaltungssätze (Masse, Impuls, Energie)

  $\longrightarrow$ 5 hydrodynamische Moden

- Weg: (i) linearisiere Bewegungsgln. (3.15), (3.62), (3.65) um homogenen GG-Zustand:

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho \longrightarrow \rho + \delta\rho(\underline{x},t) \\ \qquad \underline{v}(\underline{x},t) \\ T \longrightarrow T + \delta T(\underline{x},t) \end{array}} \qquad (3.87)$$

statt innerer Energie!

(ii) homogener GG-Zustand: $\rho, T, v=0$

- Erster Satz von Bew.-gln.: mit $\underline{b}=0$, $v_w = 0$

$$(3.15) \xrightarrow{\rho \to \rho + \delta\rho} \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \underline{v} = 0 \qquad (3.88)$$

$$(3.62) \xrightarrow[\text{nichtlinear}]{v \cdot \nabla v} \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v} + (\eta + \eta') \underline{\nabla} \operatorname{div} \underline{v} \qquad (3.89)$$

$$(3.65) \xrightarrow[\text{nichtl.}]{v \cdot \nabla u} \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -p \operatorname{div} \underline{v} + \kappa \underline{\nabla}^2 T \qquad (3.90)$$

- Zerlegung:

$$\boxed{\underline{v}(\underline{x},t) = \underline{v}_l(\underline{x},t) + \underline{v}_t(\underline{x},t) \qquad \text{mit } \operatorname{div} \underline{v}_t = 0, \ \operatorname{rot} \underline{v}_l = 0} \qquad (3.91)$$

longitudinaler — transversaler Anteil

a) Transversalmoden:

- Gleichung für $\underline{v}_t$: $[\operatorname{rot}(\ldots) \neq 0]$

  wegen $\operatorname{rot} \underline{\nabla} p = 0$ und $\operatorname{div} \underline{v}_t = 0$

$$(3.89) \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho}\underline{\nabla}^2\right)\underline{v}_t = 0 \quad (3.92)$$

- Schermoden: s. Kap. 3.1.2 & keine Kopplung an $\delta\rho$, $\delta T$!

$$\underline{v}_t = \underline{v}_t(\underline{k},\xi)\, e^{-\xi t + i\underline{k}\cdot\underline{x}}$$

mit $\underline{v}_t(\underline{k},\xi) \perp \underline{k} \longleftrightarrow \operatorname{div}\underline{v}_t = i\underline{k}\cdot\underline{v}_t = 0$

$$\text{in } (3.92) \longrightarrow \boxed{\xi_{1/2}(\underline{k}) = \frac{\eta}{\rho}k^2} \quad (3.93)$$

... 2 Schermoden für

$2\,\underline{v}_t(\underline{k},\omega) \perp \underline{k}$!

reine diffusive Moden (keine Propagation)

b) Longitudinalmoden:

- wichtige thermodynam. Relationen: s. Folie
- Umformungen für Bew.gln.: [alle Größen als Fkt. von $T,\rho$, wenn nichts anderes gesagt]

(1) in Impulsbilanz: $\underline{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial\rho}\underline{\nabla}\delta\rho + \underbrace{\frac{\partial p}{\partial T}}_{-\rho^2\frac{\partial s}{\partial\rho}\ (3.99)}\underline{\nabla}\delta T \quad (3.104)$

(2) $\underline{\nabla}^2\underline{v}_L = \underline{\nabla}\operatorname{div}\underline{v}_L - \operatorname{rot}\underbrace{\operatorname{rot}\underline{v}_L}_{=0} = \underline{\nabla}\operatorname{div}\underline{v}_L$

(3) in Energiebilanz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{p}{\rho}\operatorname{div} v_L = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial\rho}}\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\delta\rho} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial T}}_{=c_v}\frac{\partial}{\partial t}\delta T + \cancel{\frac{p}{\rho}\operatorname{div}\underline{v}_L}$$

$$\overset{(3.100)}{=}\left(\cancel{\frac{p}{\rho^2}} + T\frac{\partial s}{\partial\rho}\right)(-\rho)\operatorname{div}\underline{v}_L$$

$$\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{p}{\rho}\operatorname{div} v_L = -T\rho\frac{\partial s}{\partial\rho}\operatorname{div}\underline{v}_L + c_v\frac{\partial}{\partial t}\delta T \quad (3.106)$$

$$\xrightarrow{(3.88)} \quad \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho\operatorname{div}\underline{v}_L = 0 \quad (3.107)$$

$$\xrightarrow[\&\ (3.105)]{(3.89)\text{ mit }(3.104)} \quad \frac{\partial\underline{v}_L}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\rho}\underline{\nabla}\delta\rho - \rho\frac{\partial s}{\partial\rho}\underline{\nabla}\delta T - \frac{2\eta+\eta'}{\rho}\underline{\nabla}^2\underline{v}_L = 0 \quad (3.108)$$

$$\xrightarrow[(3.106)]{(3.90)\text{ mit}} \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\delta T - \frac{T\rho}{c_v}\frac{\partial s}{\partial \rho}\,\mathrm{div}\,\underline{v}_L - \frac{\kappa}{\rho c_v}\nabla^2 \delta T = 0} \qquad (3.109)$$

... 3 hydrodynam. Moden aus Kopplung $\delta\rho, \underline{v}_L, \delta T$

- Modenanalyse: Ansatz ebene Wellen

$$\left.\begin{aligned} \delta\rho(\underline{x},t) &= \delta\rho(\underline{k},\xi)\, e^{-\xi t + i\underline{k}\cdot\underline{x}} \\ \underline{v}_L(\underline{x},t) &= v_L(\underline{k},\xi)\frac{\underline{k}}{k}\, e^{-\xi t + i\underline{k}\cdot\underline{x}}, \quad \mathrm{rot}\,\underline{v}_L = 0! \\ \delta T(\underline{x},t) &= \delta T(\underline{k},\xi)\, e^{\cdots} \end{aligned}\right\} \quad (3.110)$$

$$\left(\text{NB: } \underline{\nabla} e^{-\xi t + i\underline{k}\cdot\underline{x}} = i\underline{k}\, e^{\cdots}\right)$$

- mit (3.110) in (3.107) – (3.109):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\xi & ik\rho & 0 \\ ik\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho} & -\xi + k^2\frac{2\eta+\eta'}{\rho} & -ik\rho\frac{\partial s}{\partial \rho} \\ 0 & -ik\frac{T\rho}{c_v}\frac{\partial s}{\partial \rho} & -\xi + \frac{\kappa}{\rho c_v}k^2 \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}\text{ ... dynam. Matrix}} \begin{bmatrix} \delta\rho(\underline{k},\xi) \\ v_L(\underline{k},\xi) \\ \delta T(\underline{k},\xi) \end{bmatrix} = 0 \qquad (3.111)$$

nichttriviale Lsg. $\boxed{\mathrm{Det}\,\mathcal{D} = 0 \longrightarrow \xi = \xi(k)}$

... Dispersionsrelation

etwas kompliziert $\longrightarrow$ in Schritten

- ohne Dissipation: $\kappa = \eta = \eta' = 0 \longrightarrow$ keine Dämpfung

(1) Schallwelle:

$$(3.111) \longrightarrow \left.\begin{aligned} \delta T &= -\frac{ik}{\xi}\frac{T\rho}{c_v}\frac{\partial s}{\partial \rho} v_L \\ \delta\rho &= \frac{ik}{\xi}\rho v_L \end{aligned}\right\} \text{ in mittlere Gl. von (3.111)}$$

$$\xrightarrow{\text{s.o.}} \underbrace{(\xi^2 + c^2 k^2)}_{=0} v_L = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\xi_{3/4} = \pm ick, \quad c = \sqrt{\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s} = \frac{1}{\sqrt{\rho\kappa_s}}}$$

– Schallwellen mit Geschw. $c$: [nach rechts bzw. links laufend] $\qquad v_L \frac{\underline{k}}{k}\, e^{i(\mp ckt + \underline{k}\cdot\underline{x})}$

EV von $\mathcal{D}$

– $c \sim \frac{1}{\sqrt{\kappa_s}}$ mit $\kappa_s$ ... isentrope Kompressibilität

[Beweis: $-\frac{k^2}{\xi}\frac{\partial p}{\partial\rho} - \xi - \frac{k^2}{\xi}\frac{T\rho^2}{c_V}\left(\frac{\partial s}{\partial\rho}\right)^2 = 0$

$\longrightarrow$ ..... $(\xi^2 + c^2k^2) = 0$ qed.]

(2) weiterer EV von $\mathcal{D}$:

$$\begin{pmatrix}\delta\rho\\0\\\delta T\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{in (3.111)}} \boxed{\xi_s = 0} \qquad -\rho^2\frac{\partial s}{\partial\rho}\ (3.53)$$

Gl. für $v_L$: $\frac{1}{\rho}\,ik\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\delta\rho + \frac{\partial p}{\partial T}\delta T\right) \sim dp = 0$

$\longrightarrow$ statische Mode ($\xi_s = 0$) mit $dp = 0$

- mit Dissipation:

(2) diffusive Wärmemode:

Ansatz: $\xi_s = \underbrace{D_T k^2}_{\text{Dämpfg} \sim k^2!}$ in Det $\underline{\underline{\mathcal{D}}} = 0$

& Terme führender Ordg in $k$ $[O(k^4)]$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \left(D_T - \frac{\kappa}{\rho c_p}\right)k^4 = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\xi_s = D_T k^2 \quad \text{mit } D_T = \frac{\kappa}{\rho c_p}} \quad (3.114) \qquad \left(\begin{array}{c}\text{Wärmestrom}\\ q = -\kappa\nabla T\end{array}\right)$$

- rein diffusive Mode für Wärmeausbreitg

$D_T$ ... Wärmediffusionskoeff.

- $c_p$ statt $c_V$ durch Kopplg an $\delta\rho$ bzw $\operatorname{div} v_L$

(1) propagierende Schallwelle mit Dämpfg:

Ansatz: $\xi_{3/4} = \pm ick + \frac{1}{2}\Gamma k^2$ in Det $\mathcal{D} = 0$

& Terme führender Ordg in $k$ $[O(k^4)]$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \boxed{\begin{array}{l}\xi_{3/4} = \pm ick + \frac{1}{2}\Gamma k^2 \\ \text{mit } c = \sqrt{\left.\frac{\partial p}{\partial\rho}\right|_s} = \frac{1}{\sqrt{\rho\kappa_s}} \\ \Gamma = D_T\left(\frac{c_p}{c_V} - 1\right) + \frac{2\eta + \eta'}{\rho}\end{array}}$$

Dämpfg aufgrd $\qquad \underbrace{D_T\left(\frac{c_p}{c_V} - 1\right)}_{\text{Wärmediffusion}} \qquad \underbrace{\frac{2\eta+\eta'}{\rho}}_{\text{Volumenviskosität}}$