

### 3.13 Hydrodynamische Moden

• Motivation

5 Erhaltungssätze (Masse, Impuls, Energie)  
 → 5 hydrodynamische Moden

• Weg: (i) linearisierte Bewegungsgln. (3.15), (3.62), (3.65)  
 um homogene GG-Zustand:

$$\begin{array}{l} \rho \longrightarrow \rho + \delta\rho(x,t) \\ \underline{v}(x,t) \\ T \longrightarrow T + \delta T(x,t) \end{array} \quad (3.87)$$

↑  
 stört innere Energie!

(ii) homogener GG-Zustand:  $\rho, T, \underline{v} = 0$

• Erster Satz von Bew.gln.: mit  $\underline{b} = 0, v_w = 0$

$$(3.15) \underline{\rho} \rightarrow \underline{\rho} + \delta\rho \rightarrow \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \underline{v} = 0 \quad (3.88)$$

$$(3.62) \frac{\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}}{\text{nichtlinear}} \rightarrow \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v} + (\eta + \zeta') \nabla \operatorname{div} \underline{v} \quad (3.89)$$

$$(3.65) \frac{\underline{v} \cdot \nabla u}{\text{nichtl.}} \rightarrow \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -p \operatorname{div} \underline{v} + \kappa \nabla^2 T \quad (3.90)$$

• Zerlegung:

$$\underline{v}(x,t) = \underline{v}_L(x,t) + \underline{v}_T(x,t) \quad \text{mit } \operatorname{div} \underline{v}_T = 0 \quad \operatorname{rot} \underline{v}_L = 0 \quad (3.91)$$

↑  
 Longitudinaler

↑  
 transversaler Anteil

a) Transversalmoden:

• Gleichg für  $\underline{v}_T$ : [ $\operatorname{rot}(\dots) \neq 0$ ]  
 wegen  $\operatorname{rot} \nabla p = 0$  und  $\operatorname{div} \underline{v}_T = 0$

$$(3.89) \rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nu}{S} \nabla^2 \right) v_t = 0 \quad (3.92)$$

• Schwermoden: s. Kap. 3.12 & keine Kopplung an  $\delta S, \delta T!$

$$v_t = v_t(k, \omega) e^{-i\omega t + i k \cdot x}$$

$$\text{mit } v_t(k, \omega) \perp k \iff \text{div } v_t = i k \cdot v_t = 0$$

$$\text{in (3.92)} \rightarrow \boxed{\frac{\nu}{S} k^2} \quad (3.93)$$

... 2 Schwermoden für

$$2 v_t(k, \omega) \perp k!$$

reine diffusive Moden (keine Propagation)

b) Longitudinalmoden:

• wichtige thermodynam. Relationen: s. Folie

• Umformung für Bes.gl.: [alle Größe als Fkt. von  $T, S$ , wenn nicht anders gesagt]

$$(1) \text{ in Impulsbilanz: } \nabla p = \frac{\partial p}{\partial S} \nabla \delta S + \frac{\partial p}{\partial T} \nabla \delta T \quad (3.104)$$

$$- S^2 \frac{\partial S}{\partial S} \quad (3.93)$$

$$(2) \nabla^2 v_L = \nabla \text{div } v_L - \underbrace{\text{rot rot } v_L}_{=0} = \nabla \text{div } v_L$$

(3) in Energiebilanz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{p}{S} \text{div } v_L = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial t}}_{=c_v} + \frac{\partial u}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{p}{S} \text{div } v_L$$

$$\stackrel{(3.104)}{=} \left( \frac{p}{S^2} + T \frac{\partial S}{\partial S} \right) (-S) \text{div } v_L$$

$$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{p}{S} \text{div } v_L = -T_S \frac{\partial S}{\partial S} \text{div } v_L + c_v \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.106)$$

$$(3.88) \rightarrow \boxed{\frac{\partial \delta S}{\partial t} + S \text{div } v_L = 0} \quad (3.107)$$

$$\frac{(3.92) \text{ mit } (3.107)}{\& (3.105)} \rightarrow \boxed{\frac{\partial v_L}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial p}{\partial S} \nabla \delta S - S \frac{\partial S}{\partial S} \nabla \delta T - \frac{2\nu + \nu'}{S} \nabla^2 v_L = 0} \quad (3.108)$$

(3.80) mit (3.106)  $\rightarrow \left[ \frac{\partial}{\partial t} \delta T - \frac{T_0}{c_v} \frac{\partial s}{\partial s} \operatorname{div} v_L - \frac{\kappa}{\rho c_v} \nabla^2 \delta T = 0 \right] \quad (3.109)$

... 3 hydrodynam. Moden aus Kopplg  $\delta s, v_L, \delta T$

• Modenanalyse:  
Ansatz ebene Wellen

$$\left. \begin{aligned} \delta s(x,t) &= \delta s(k, \xi) e^{-\xi t + i k \cdot x} \\ v_L(x,t) &= v_L(k, \xi) \frac{k}{k} e^{-\xi t + i k \cdot x}, \quad \operatorname{rot} v_L = 0! \\ \delta T(x,t) &= \delta T(k, \xi) e^{-\xi t + i k \cdot x} \end{aligned} \right\} (3.110)$$

(NB:  $\nabla e^{-\xi t + i k \cdot x} = i k e^{-\xi t + i k \cdot x}$ )

• mit (3.110) in (3.107) - (3.109):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\xi & i k s & 0 \\ i k \frac{1}{s} \frac{\partial p}{\partial s} & -\xi + k^2 \frac{2\gamma + 1}{s} & -i k s \frac{\partial s}{\partial s} \\ 0 & -i k \frac{T_0}{c_v} \frac{\partial s}{\partial s} & -\xi + \frac{\kappa}{\rho c_v} k^2 \end{bmatrix}}_{\mathcal{D} \dots \text{dynam. Matrix}} \begin{bmatrix} \delta s(k, \xi) \\ v_L(k, \xi) \\ \delta T(k, \xi) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.111)$$

nichttriviale Lsg.  $\boxed{\operatorname{Det} \mathcal{D} = 0 \rightarrow \xi = \xi(k)}$

... Dispersionsrelation

etwas kompliziert  $\rightarrow$  in Schritte

• ohne Dissipation:  $\kappa = \gamma = \gamma' = 0 \rightarrow$  keine Dämpfung

(1) Schallwelle:

$$(3.111) \rightarrow \left. \begin{aligned} \delta T &= -\frac{i k}{\xi} \frac{T_0}{c_v} \frac{\partial s}{\partial s} v_L \\ \delta s &= \frac{i k}{\xi} s v_L \end{aligned} \right\} \text{in mittlere Gl. von (3.111)}$$

o.k.  $\rightarrow (\underbrace{\xi^2 + c^2 k^2}_{=0}) v_L = 0$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\xi}{s k} = \pm i c k, \quad c = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_s} = \frac{1}{\rho \alpha_s}}$$

- Schallwelle mit Geschw.  $c$ :  
[nach rechts bzw. links laufend]  $v_L \frac{d}{dt} e^{i(\gamma c k t + k \cdot x)}$

$\uparrow$   
EU von  $\mathcal{D}$

-  $c \sim \frac{1}{\rho \alpha_s}$  mit  $\alpha_s \dots$  isentrope Kompressibilität

$$[\text{Kweis: } -\frac{k^2 \gamma p}{\gamma} - \gamma - \frac{k^2}{\gamma} \frac{T_s^2}{c_v} \left(\frac{\gamma s}{\gamma s}\right)^2 = 0$$

$$\rightarrow \dots (\gamma^2 + c^2 k^2) = 0 \text{ gel.}]$$

2) weiter EU von  $\mathcal{D}$ :

$$\begin{pmatrix} \delta p \\ \delta T \\ \delta S \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{in (3.11)}} \boxed{\xi_5 = 0} \quad \begin{matrix} -\gamma \frac{\partial \delta S}{\partial t} \\ \text{(3.13)} \end{matrix}$$

$$\text{G.f. } v_i: \frac{1}{\gamma} i k \left( \frac{\partial p}{\partial S} \delta p + \frac{\partial p}{\partial T} \delta T \right) \sim dp = 0$$

$\rightarrow$  statische Mode ( $\xi_5 = 0$ ) mit  $dp = 0$

- mit Dissipation:

(2) diffusive Wärme mode:

$$\text{Ansatz: } \xi_5 = \underbrace{D_T}_{\text{Dampf} \sim k^2} k^2 \quad \text{in Det } \mathcal{D} = 0$$

& Terme führender Ordng in  $k$  [ $O(k^4)$ ]

$$\text{o.B.} \rightarrow (D_T - \frac{\chi}{\gamma c_p}) k^4 = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\xi_5 = D_T k^2 \text{ mit } D_T = \frac{\chi}{\gamma c_p}} \quad (3.114) \quad \left( \begin{matrix} \text{Wärmestrom} \\ q = -\chi \nabla T \end{matrix} \right)$$

- rein diffusive Mode für Wärmeausbreitung  
 $D_T$  ... Wärme diffusionskoeff.

-  $c_p$  statt  $c_v$  durch Kopplung an  $\delta p$  bzw.  $\text{div } v_i$

(1) propagierende Schallwelle mit Dämpfung:

$$\text{Ansatz: } \xi_{2/4} = \pm i c k + \frac{1}{2} T k^2 \quad \text{in Det } \mathcal{D} = 0$$

& Terme führender Ordng in  $k$  [ $O(k^4)$ ]

$$\text{o.B.} \rightarrow \boxed{\xi_{2/4} = \pm i c k + \frac{1}{2} T k^2}$$

$$\text{mit } c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}_s = \frac{1}{\sqrt{\rho \chi_s}}$$

$$T = D_T \left( \frac{c_p}{c_v} - 1 \right) + \frac{2\eta + \eta'}{\gamma}$$

Dämpfung  
aufgrund

Wärme-  
diffusion

Volume-  
viskosität