3.6 Energiebilanz = 1. Hauptsatz der Thermodynamik

- Gesamtenergie:

$$E = \int_V \rho(\underline{x},t)\, e(\underline{x},t)\, d^3x \qquad (3.31)$$

$$= \int_V \rho(\underline{x},t) \left[\tfrac{1}{2}\underline{v}^2(\underline{x},t) + u(\underline{x},t)\right] d^3x$$

e ... spezifische Gesamtenergie / G. energie pro Masseneinheit

u ... " innere Energie / innere Energie "

[aus TD !!]

vgl: $dU = \delta Q + dW_{mech}$

- 1. Hauptsatz: $\frac{dE}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho e)\, d^3x \qquad (3.32)$

$$= -\underbrace{\int_{\partial V} \rho e\, \underline{v}\cdot d\underline{f}}_{\substack{\text{Energie-stromdichte} \\ \text{Konvektiver Anteil}}} \underbrace{- \int_{\partial V} \underline{q}\cdot d\underline{f} + \int_V \rho r_w\, d^3x}_{\substack{\text{zugefügte Wärme} \\ \text{pro Zeiteinheit}}} + \underbrace{\int_V \rho \underline{b}\cdot\underline{v}\, d^3x + \int_{\partial V} \underline{v}\cdot\underline{\underline{T}}\, d\underline{f}}_{\substack{\text{mechanische Leistung} \\ \text{von Volumen und} \\ \text{Oberflächen-Kräften}}}$$

$\underline{q}$ ... Wärmestromdichte

r_w ... Wärmeerzeugung pro Masseneinheit

- Umformung:

$$\int_{\partial V} \underline{v}\cdot\underline{\underline{T}}\, d\underline{f} \overset{\text{Gauss}}{=} \int_V \operatorname{div}\left(\underline{\underline{T}}^t\, \underline{v}\right) d^3x$$

(3.32) $\Rightarrow$ Kanonische Form:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)\right] + \operatorname{div}\underbrace{\Big[\underbrace{\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)\underline{v}}_{\text{konvektiv}} - \underbrace{\underline{\underline{T}}^t\underline{v}}_{\substack{\text{innere}\\ \text{Kräfte}}} + \underbrace{\underline{q}}_{\substack{\text{Wärme}\\ \text{Strom}}}\Big]}_{\text{Energiestromdichte}} = \rho\left(\underline{v}\cdot\underline{b} + r_w\right)} \qquad (3.33)$$

NB: Kontinuitätsgl. für ρe und Quellterme

• Umschreibung:

(i) $\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \mathrm{div}(\rho e \underline{v}) \overset{(3.17)}{=} \left[\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t} + \underline{v}\cdot\nabla e\right)\right] = \rho \frac{de}{dt}$

$\overset{e=\frac{v^2}{2}+u}{=} \underset{\shortparallel}{\underline{\rho \underline{v}\cdot\frac{dv}{dt}}} + \rho\frac{du}{dt}$

(ii) $\mathrm{div}(\underline{\underline{T}}^t \underline{v}) = \nabla_i (T_{ji} v_j) = \underline{\underline{v}\cdot\mathrm{div}\underline{\underline{T}}} + \underbrace{T_{ji}\nabla_i v_j}$

$+\rho\underline{v}\cdot\underline{b}$ $\qquad T^t_{ij} L_{ji} = \mathrm{Sp}(\underline{\underline{T}}^t \underline{\underline{L}})$ [mit (3.7)]

$[\underline{v}\cdot(3.22)]$

(3.33) ⟶ (grüne Terme fallen raus)

$$\boxed{\rho\frac{du}{dt} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \underline{v}\cdot\nabla u\right) = \underbrace{\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{T}}^t \underline{\underline{L}}\right)}_{\text{mechanische Leistung der inneren Kräfte}} - \underbrace{\mathrm{div}\, q}_{\text{Wärme Fluß}} + \underbrace{\rho r_w}_{\text{Wärme Quellen}}} \qquad (3.34)$$

3.7 2. Hauptsatz der Thermodynamik

• hilft bei Aussagen über Materialgesetze $\underline{\underline{T}}$, q

• homogene Systeme: $dS \geq \frac{dQ}{T}$

= für reversible Prozesse, > irreversible Prozesse

$S = \int \rho s \, d^3x$

s… spezifische Entropie / Entropie pro Masseneinheit

2. HS $\qquad$ (3.35)

$$\frac{dS}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho s)\, d^3x \geq \oint_{\partial V} \Big(\overbrace{\rho s \underline{v}}^{\text{konvektiv}} + \underbrace{\frac{q}{T}}_{\text{Wärme Ströme}}\Big)\cdot d\underline{f} + \int_V \underbrace{\frac{\rho r_w}{T}}_{\text{Quellen}}\, d^3x$$

Gauss [alles nach links schaffen]

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \mathrm{div}\left(\rho s\underline{v} + \frac{q}{T}\right) - \frac{\rho r_w}{T} \geq 0 \\ \text{bzw. mit (3.17)} \quad T\sigma &= T\rho\frac{ds}{dt} + \mathrm{div}\, q - \underbrace{\frac{1}{T} q\cdot\nabla T}_{Tq\cdot\nabla\frac{1}{T}} - \rho r_w \geq 0 \end{aligned}} \qquad (3.36)$$

… Clausius-Duhem-Gl

Deutung: (i) reversible Prozesse: $\sigma = 0$

(ii) irreversible Prozesse: $\sigma > 0$

σ ... Entropieproduktionsrate pro Volumeneinheit für Dissipativen Vorgänge im System

- Umschreibung:
  (i) Kontrollgröße T $\to$ führen ein $\boxed{f = u - Ts}$ (3.37)
  ... spezifische freie Energie

  (ii) verwende Erhaltungsätze:
  mit 1. HS $\overset{(3.34)}{}$ $[\rho r_u - \operatorname{div} q = \rho \frac{du}{dt} - Sp \underline{\underline{T}}^t \underline{\underline{L}}]$ in (3.36)

$$T\sigma = -\rho\left(\frac{du}{dt} - T\frac{ds}{dt}\right) + Sp\left(\underline{\underline{T}}^t \underline{\underline{L}}\right) - \frac{1}{T} q \cdot \nabla T \geq 0$$

$$\to \boxed{T\sigma = -\rho\left(\frac{df}{dt} + s\frac{dT}{dt}\right) + Sp\left(\underline{\underline{T}}^t \underline{\underline{L}}\right) - \frac{1}{T} q \cdot \nabla T \geq 0} \quad (3.38)$$

mit $\frac{df}{dt} = \frac{du}{dt} - s\frac{dT}{dt} - T\frac{ds}{dt}$

3.8 Die Newtonsche Flüssigkeit

a) erste Aussagen für isotope Flüssigkeiten

- Annahme: $f = f(T, \rho)$ [keine Variable für Vorzugsrichtung im Raum]

$$\boxed{\begin{array}{ll} \to \text{Druck:} & p = \rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \\ \text{spez. Entropie:} & s = -\frac{\partial f}{\partial T} \end{array}} \quad (3.39)$$

Beweis. s. Übungen $[p = -\frac{\partial F}{\partial V}]$

$$F = F(T, V, N) = N F(T, \tfrac{V}{N}, 1) = \underbrace{NM}_{\text{Gesamtmasse}} F(T, \tfrac{1}{\rho}, \tfrac{1}{M}) = NM f(T, \rho)$$

F. Extensiv in N Molzahl; $\frac{V}{NM} = \frac{1}{\rho}$; M Molmasse

$$\Rightarrow p = -\frac{\partial F}{\partial V} = -\frac{NM}{NM}\frac{\partial f}{\partial \frac{1}{\rho}} = -\frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial \frac{1}{\rho}} = \rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho}$$

- Umformung von (3.38): $\dot{} = \frac{d}{dt}$

$$T\sigma = -\rho(\dot{f} + s\dot{T}) + Sp\, \underline{\underline{T}}^t \underline{\underline{L}} - \frac{1}{T} q \cdot \nabla T \geq 0 \quad (3.38$$

mit (i) $\underline{\underline{T}}^t = \underline{\underline{T}}$: $Sp\, \underline{\underline{T}}^t \underline{\underline{L}} \to Sp\, \underline{\underline{T}}\, \underline{\underline{A}}$
[Es war $L_{ij} = \nabla_j v_i$, $A_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j)$]

(ii) Zerlegung $\boxed{\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^0 + \underline{\underline{T}}'}$ (3.40)

statischer Anteil: $\boxed{\begin{array}{l}\underline{\underline{T}}^0 = -p\, \mathbb{1} \\ \to \underline{\underline{T}}\, df = -p\, df\end{array}}$ (3.41)

Grund: keine Schubspannung $\perp$ df

dissipativer Anteil $\underline{\underline{T}}'$ (s.u.)

damit $\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{\Delta}} = \mathrm{Sp}\left[(-p\mathbb{1}+\underline{\underline{T}}')\underline{\underline{\Delta}}\right] = -p\,\underbrace{\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{\Delta}}}_{-\rho\,\mathrm{div}\,\underline{v}} + \mathrm{Sp}(\underline{\underline{T}}'\underline{\underline{\Delta}})$

$\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\underline{v}) = \dot\rho + \rho\,\mathrm{div}(\underline{v}) = 0\right] \longrightarrow \quad = \frac{p}{\rho}\dot\rho + \mathrm{Sp}(\underline{\underline{T}}'\underline{\underline{\Delta}})$

(iii) $= \dot f = \frac{\partial f}{\partial T}\dot T + \frac{\partial f}{\partial \rho}\dot\rho$

$\xrightarrow{\text{(i)-(iii)}}$ in (3.38) $\quad T\sigma = -\rho\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial T}+s\right)}_{(1)}\dot T - \underbrace{\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{p}{\rho}\right)}_{(2)}\dot\rho + \mathrm{Sp}(\underline{\underline{T}}'\underline{\underline{\Delta}}) - \frac{1}{T}\underline{q}\cdot\nabla T \geq 0$ (3.42)

Argumentation $\dot T$, $\dot\rho$ frei präparierbar

[damit $T\sigma \geq 0$] $\rightarrow$ (1) $= 0$ (Gl 3.39)

$\rightarrow$ (2) $= 0$

$\longrightarrow$ Entropieproduktionsrate pro Volumeneinheit:

$$\boxed{T\sigma = \underbrace{\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{T}}'\underline{\underline{\Delta}}}_{\text{Dissipation bei Mech. Arbeit}} - \underbrace{\frac{1}{T}\underline{q}\cdot\nabla T}_{\text{Dissipation durch Wärmefluß}} \geq 0} \quad 3.43$$