

3.6 Energiebilanz = 1. Hauptsatz der Thermodynamik

• Gesamtenergie:
$$E = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) e(\mathbf{x}, t) d^3x \quad (3.31)$$

$$= \int_V \rho(\mathbf{x}, t) \left[\frac{1}{2} \mathbf{v}^2(\mathbf{x}, t) + u(\mathbf{x}, t) \right] d^3x$$

e ... spezifische Gesamtenergie / G. Energie pro Masseneinheit

u ... " innere Energie / innere Energie "

[aus TD !!]

vgl: $du = dQ + dW_{\text{mech}}$

• 1. Hauptsatz:
$$\frac{dE}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) d^3x \quad (3.32)$$

$$= - \int_V \rho e \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} - \int_V \mathbf{q} \cdot d\mathbf{f} + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} + \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d^3x + \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} d\mathbf{f}$$

Energie-Strömliche
 \mathbf{q} ... Wärmestromdichte
mechanische Leistung

Kontinuität Anteil
 \mathbf{f} ... Wärmeproduktion
von Volumen und

pro Masseneinheit
Oberflächen-Kräften

zugefügte Wärme

pro Zeiteinheit

- Umformung:

$$\int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} d\mathbf{f} = \int_V \text{div}(\mathbf{T}^T \mathbf{v}) d^3x$$

(3.32) \rightarrow kanonische Form:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + u \right) \right] + \text{div} \left[\underbrace{\rho \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + u \right) \mathbf{v}}_{\text{Kontinuität}} - \underbrace{\mathbf{T}^T \mathbf{v}}_{\text{innere Kräfte}} + \underbrace{\mathbf{q}}_{\text{Wärme Strom}} \right] = \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) \quad (3.33)$$

Energiestromdichte

NB: Kontinuitätsgl. für ρe und Quellterme

• Umschreibung:

$$(i) \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \text{div}(\rho e \underline{v}) \stackrel{(3.17)}{=} \left[\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla e \right) \right] = \rho \frac{de}{dt}$$

$$e = \frac{v^2}{2} + u \\ = \rho \underline{v} \cdot \frac{d\underline{x}}{dt} + \rho \frac{du}{dt}$$

$$(ii) \text{div}(\underline{I}^b \underline{v}) = \nabla_i (T_{ij} v_j) = \underline{v} \cdot \text{div} \underline{I} + \underbrace{T_{ij} \nabla_i v_j}_{\substack{+ \rho \underline{v} \cdot \underline{g} \\ [\underline{v} \cdot (3.22)]}} + \underbrace{T_{ij} L_{ji}}_{\text{mit (3.2)}} = \text{Sp}(\underline{I}^b \underline{L}) \quad [\text{mit (3.2)}]$$

(3.33) → (grüne Terme fallen raus)

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla u \right) = \underbrace{\text{Sp}(\underline{I}^b \underline{L})}_{\substack{\text{mechanische Leistung} \\ \text{der inneren Kräfte}}} - \underbrace{\text{div} \underline{q}}_{\substack{\text{Wärme} \\ \text{Quellen}}} + \underbrace{\rho \underline{v} \cdot \underline{g}}_{\substack{\text{Wärme} \\ \text{Fluß}}} \quad (3.34)$$

3.7 2. Hauptsatz der Thermodynamik

• hilft bei Aussagen über Materialgesetze \underline{I} , \underline{q}

• homogene Systeme: $dS \geq \frac{dQ}{T}$
 ↗ = für reversible Prozesse, ↘ irreversible Prozesse

$$S = \int \rho s \, d^3x$$

s... spezifische Entropie/Entropie pro Masseneinheit

2. HS

$$\frac{dS}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho s) \, d^3x \geq \int_V \underbrace{(\rho s \underline{v} + \frac{\underline{q}}{T})}_{\substack{\text{konvektiv} \\ \text{Wärme} \\ \text{Strome}}} \cdot d\underline{f} + \int_V \underbrace{\frac{\rho \underline{v} \cdot \underline{g}}{T}}_{\substack{\text{Wärme} \\ \text{Quellen}}} \, d^3x \quad (3.35)$$

Gesam [alles nach links schaffen]

$$\underline{G} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho s) + \text{div} \left(\rho s \underline{v} + \frac{\underline{q}}{T} \right) - \frac{\rho \underline{v} \cdot \underline{g}}{T} \geq 0 \quad (3.36)$$

$$\text{bzw. mit (3.17)} \quad T \underline{G} = T \rho \frac{ds}{dt} + \text{div} \underline{q} - \frac{1}{T} \underline{q} \cdot \nabla T - \rho \underline{v} \cdot \underline{g} \geq 0 \\ \underbrace{T \nabla \cdot \frac{\underline{q}}{T}}_{\dots \text{Clausius-Duhem-GI}}$$

Darlegung: (i) reversible Prozesse: $\underline{G} = 0$

(ii) irreversible Prozesse: $\underline{G} > 0$

σ ... Entropieproduktionsrate pro Volumeneinheit für dissipative Vorgänge im System

• Umschreibung:

(i) Kontrollgröße $T \rightarrow$ führen ein $f = u - Ts$ (3.37)
... spezifische freie Energie

(ii) verwende Erhaltungssätze:

mit 1. HS (3.34) $[\rho_{in} - \text{div} q = \rho \frac{du}{dt} - Sp \underline{I}^{\dagger} \underline{L}]$ in (3.36)

$$T \sigma' = -\rho \left(\frac{du}{dt} - T \frac{ds}{dt} \right) + Sp \left(\underline{I}^{\dagger} \underline{L} \right) - \frac{1}{T} q \cdot \nabla T \geq 0$$

$$\rightarrow T \sigma' = -\rho \left(\frac{df}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) + Sp \left(\underline{I}^{\dagger} \underline{L} \right) - \frac{1}{T} q \cdot \nabla T \geq 0 \quad (3.38)$$

mit $\frac{df}{dt} = \frac{du}{dt} - s \frac{dT}{dt} - T \frac{ds}{dt}$

3.8 Die Newtonsche Flüssigkeit

a) ersten Aussagen für isotope Flüssigkeiten

• Annahme: $f = f(T, p)$ [keine Variable für Vorzugsrichtung im Raum]

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{Druck: } p &= \rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} & (3.57) \\ \text{spez. Entropie: } s &= -\frac{\partial f}{\partial T} \end{aligned}$$

Beweis: s. Übungen

$$\begin{aligned} [p = -\frac{\partial F}{\partial V}] & \quad \text{Gesamtmasse} \\ F = F(T, V, N) = N F(T, \frac{V}{N}, 1) & = N M F(T, \frac{1}{\rho}, \frac{1}{M}) = N M f(T, p) \\ \text{F. Extensiv in } N & \quad \text{Molmasse} \\ \frac{V}{N M} = \frac{1}{\rho} & \\ \Rightarrow p = -\frac{\partial F}{\partial V} = -\frac{N M}{N M} \frac{\partial F}{\partial \frac{1}{\rho}} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} = \rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \end{aligned}$$

• Umformung von (3.38): $\sigma = \frac{d}{dt}$

$$T \sigma' = -\rho \left(\dot{f} + s \dot{T} \right) + Sp \underline{I}^{\dagger} \underline{L} - \frac{1}{T} q \cdot \nabla T \geq 0 \quad (3.38)$$

mit (i) $\underline{I}^{\dagger} = \underline{I}$: $Sp \underline{I}^{\dagger} \underline{L} \rightarrow Sp \underline{I} \underline{L}$

[Es war $L_{ij} = \nabla_j v_i$, $A_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j)$]

(ii) Zerlegung $\underline{I} = \underline{I}^{\circ} + \underline{I}'$ (3.40)

$$\text{statischer Anteil: } \underline{I}^{\circ} = -p \underline{1} \rightarrow \underline{I} df = -p df \quad (3.41)$$

Grund: keine Schubspannung \perp $d\mathbf{f}$

dissipativer Anteil \underline{I}' (s.u.)

$$\text{damit } Sp \underline{I}'_A = Sp [(-p \mathbb{1} + \underline{I}') \underline{A}] = \underbrace{-p Sp \underline{A}}_{-p \operatorname{div} \underline{v}} + Sp(\underline{I}'_A)$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(p \underline{v}) = \dot{p} + p \operatorname{div}(\underline{v}) = 0 \right] \longrightarrow = \frac{p}{\rho} \dot{\rho} + Sp(\underline{I}'_A)$$

$$(iii) = \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial f}{\partial p} \dot{p}$$

$$\xrightarrow[\text{in (3.38)}]{(i)-(ii)} T \dot{G} = - \underbrace{\rho \left(\frac{\partial f}{\partial T} + s \right) \dot{T}}_{(1)} - \underbrace{\left(\rho \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{p}{\rho} \right) \dot{p}}_{(2)} + Sp(\underline{I}'_A) - \frac{1}{T} \underline{q} \cdot \nabla T \geq 0 \quad (3.42)$$

Argumentation \dot{T}, \dot{p} frei präparierbar

$$\begin{aligned} [\text{damit } T \dot{G} \geq 0] &\rightarrow (1) = 0 \quad (G) \text{ 3.39} \\ &\rightarrow (2) = 0 \end{aligned}$$

→ Entropieproduktionsrate pro Volumeneinheit:

$$\boxed{T \dot{G} = \underbrace{Sp \underline{I}'_A}_{\text{Dissipation bei Mech. Arbeit}} - \frac{1}{T} \underline{q} \cdot \nabla T}_{\text{Dissipation durch Wärmefluss}} \geq 0 \quad 3.43$$