

Mobilitätsensoren:

$$\underline{u}_i = \sum_j \underline{\mu}_{ij} \underline{F}_j \quad (6.1)$$

6.2 Punktteilchen

$$\underline{\mu}_{ii} = \frac{1}{6\pi\eta a} \underline{1} \quad (6.8)$$

$$\underline{\mu}_{ij} = \underline{0} \quad (\underline{x}_i - \underline{x}_j) \quad (6.11)$$

$$\underline{\mu}_{ij} \sim \frac{1}{r_{ij}} \quad !!!$$

6.3 Rotne-Prager-Näherung

• direkt: $\left. \begin{aligned} u_i &= \frac{1}{6\pi\eta a} \underline{F}_i = \mu_0 \underline{F}_i \\ u_j &= \dots = \mu_0 \underline{F}_j \end{aligned} \right\} (6.12)$

• jedoch: Strömungsfeld von Teilchen j:

„Stokes“: $\underline{v}^{(j)}(\underline{x}) \stackrel{(6.11)}{=} \underline{0}(\underline{x} - \underline{x}_j) u_j \stackrel{(6.12)}{=} \underline{0}(\underline{x} - \underline{x}_j) \mu_0 \underline{F}_j \quad (6.13)$

mit $\underline{0}(\underline{x}) = \frac{3}{4} \frac{a}{r} \left(1 + \frac{\underline{x} \otimes \underline{x}}{r^2}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left(1 - 3 \frac{\underline{x} \otimes \underline{x}}{r^2}\right) \quad (6.14)$

→ Einfluß auf Teilchen i:

Foxén-Theorem: $\underline{u}_i \stackrel{(6.13)}{=} \mu_0 \underline{F}_i + \left(1 + \frac{a^2}{6} \nabla_i^2\right) \underline{v}^{(j)}(\underline{x}_i)$
 $\stackrel{(6.14)}{=} \mu_0 \left[\underline{F}_i + \left(1 + \frac{a^2}{6} \nabla_i^2\right) \underline{0}(\underline{x}_i - \underline{x}_j) \underline{F}_j \right] \quad (6.15)$

→ Mobilitäten:

$$\underline{\mu}_{ii} = \mu_0 \underline{1} \quad (6.16)$$

$$\underline{\mu}_{ij} = \mu_0 \left(1 + \frac{a^2}{6} \nabla_i^2\right) \underline{0}(\underline{x}_i - \underline{x}_j) \stackrel{(6.14)}{=} \left(1 + \frac{a^2}{6} \nabla_i^2\right) \left(1 + \frac{a^2}{6} \nabla_j^2\right) \underline{0}(\underline{x}_i - \underline{x}_j)$$

$$= \mu_0 \left[\frac{3}{4} \frac{a}{r_{ij}} \left(1 + \frac{\underline{x}_i \otimes \underline{x}_j}{r_{ij}^2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r_{ij}}\right)^3 \left(1 - 3 \frac{\underline{x}_i \otimes \underline{x}_j}{r_{ij}^2}\right) \right] \quad (6.17)$$

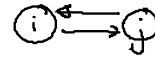
Oseen!

Bem: (i) nur 2-Teilchen-WW

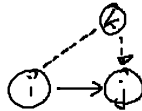
(ii) Entwicklung der $\underline{\mu}_{ij}$ bis $\frac{1}{r_{ij}^2}$

• Höhere Ordnungen? \rightarrow Methode der Reflexionen

(i) Reflexion von $\underline{\mu} \propto (\underline{x}_i - \underline{x}_j) \mu_j$ an Teilchen i:



(ii) Vielteilchen-WW:



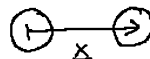
(iii) Systematische Entwicklung:
"Methode der induzierten Kräfte"

s. B. Cidocchi, B. U. Felderhof.... J. Chem. Phys. 100, 3780 (1994)

\implies Korrektur zu Rohre-Paaren:

$$\left. \begin{aligned} \underline{\mu}_{ii} &: O(r_{ij}^{-4}) \\ \underline{\mu}_{ij}^{\pm} &: O(r_{ij}^{-7}) \dots \text{reine 2-Teilchen-WW} \\ & \quad \text{O}(r_{ik}^{-2}, r_{jk}^{-2}) \dots \text{3-Teilchen-WW} \end{aligned} \right\} (6.18)$$

• reines 2-Teilchen-System:



$$\underline{\mu}_{ij} = \mu_{ij}^{\parallel}(r) \frac{\underline{x} \otimes \underline{x}}{r^2} + \mu_{ij}^{\perp}(r) \left(\underline{1} - \frac{\underline{x} \otimes \underline{x}}{r^2} \right) \quad \forall ij \quad (6.19)$$

$\mu_{ij}^{\parallel/\perp}(r)$... Mobilitäten für Bewegung \parallel/\perp zu \underline{x} !

6.4 Teilchen nahe Kontakt

• "Kleinheitsparameter":

$$\varepsilon = \frac{d}{a} \quad (6.20)$$

• 4 Situationen:

Relativbewegungen:

(1) "Squeezing"-Bew.

(2) Scler-Bew.



$$u_1 = -u_2 = u$$

$$F_1 = -F_2 = F$$

Kollektivbewegungen:

(3) $\rightarrow \rightarrow$

$$u_1 = u_2 = u$$

$$F_1 = F_2 = F$$

(4) $\uparrow \uparrow$

• Reibungs Koeff. nicht:

(i) Lubrications Theorie: asymptotische Entwicklung in ε^{-1}
(divergente Terme bei analyt. Bedg)

(ii) numerische Bedg

⇒ für Situation:

$$(1) \frac{F}{6\pi\eta a u} = \left[\frac{1}{2\varepsilon} \right] + \frac{9}{20} \ln \frac{1}{\varepsilon} + O(1) + \frac{3}{28} \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon)$$

$$(2) \frac{F}{6\pi\eta a u} = -\frac{1}{3} \left[\ln \varepsilon \right] + O(1) + O(\varepsilon)$$

"schwere Divergenz"
+ große Gradienten

(3)(4) $\frac{F}{6\pi\eta a u} < 1$ (s.u.)

• Mobilitäten: $O(1)$, aber teilweise divergente Ableitungen

Bsp: Situation (1): $u = \varepsilon \frac{F}{3\pi\eta a} + \dots$ (6.22)

NB: $u \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$!!

Situation (2): $u = -\frac{1}{\ln \varepsilon} \frac{F}{2\pi\eta a} + \dots$ (6.23)

• Programm HydroLib: Cluster von Teilchen $\rightarrow \underline{M}, \underline{Z}$

K. Hinssen, Comput. Phys. Commun. 88, 327 (1995)

Fürtra Quellcode

• Bsp: 2-Teilchen-System: μ_{11}, μ_{12} s. Folie

Lit: S. Kim & J.S. Karrila, Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications (Boston, Butterworth-Heinemann 1991)

6.5. Beispiele [Folien]

- Sedimentation: - 2 Teilchen: Sedimentationsgeschw.
- 3 Teilchen, verschiedene Geometrien
kreisende Teilchen
transientes Chaos
- Cluster Oszillationen
- "hydrodynamische Stoß" (bei kleinen Re)

7. Anwendung II: Biomimetisches Flagellum

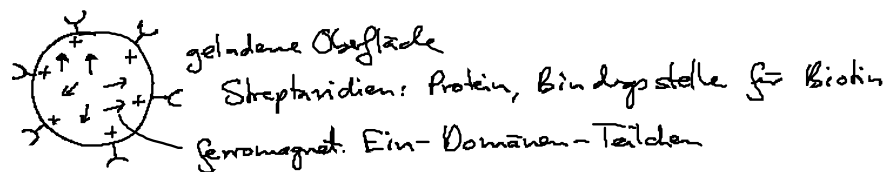
- Biomimetik: Natur als Ideengeber für Lösungsstrategien von Problemstellungen in Forschung und Technologie
- hier: Athame Flagellum, Zilien von Mikroorganismen nach
→ Fortbewegung von Mikromaschinen
Flüssigkeitstransport (Mikrofluidik)

7.1 Experimentelles System

- superparamagnet. Filament: [Dreyfus, et al., Nature **437**, 862 (2005)]
hohe magnetische Momente im Magnetfeld

(i) Bestandteile:

(1) superparamagnetische Teilchen: $a \approx 0,5 \mu\text{m}$



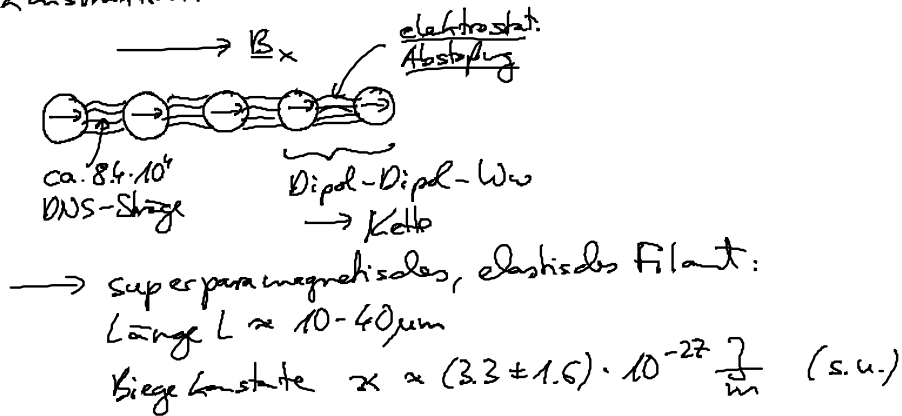
+

(2) DNA-Stränge mit Biotin-Enden

← Biotin = Vitamin H = organische Säure
215 Basenpaare $\hat{=}$ 107nm
(Persistenzlänge $l_p = 52\text{nm}$)

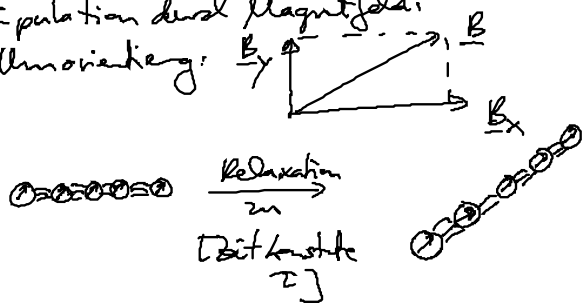
⊖ Biotin-Streptavidin-Bindung
[eine der stärksten nicht kovalenten Bindungen]

(ii) Konstruktion:



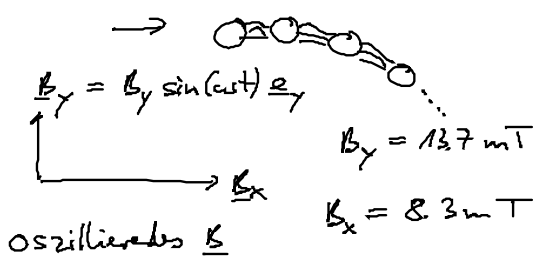
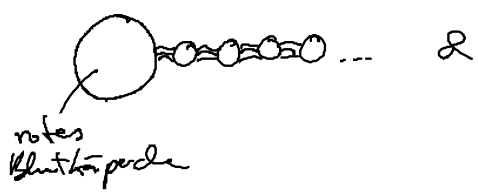
(iii) Manipulation durch Magnetfeld:

(1) Umorientierung:



(2) oszillierendes B : $\omega \sim \frac{1}{\tau}$ für optimale Antwort!
 Reibungskräfte \leftrightarrow Biegekräfte

\rightarrow einarmiger Schwimmer



- (i) Film: [s. Folie] $v \approx 6 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}}$
 Schwimmrichtung: Last hinten!
- (ii) Ollagunster: nicht reziproke Bewegung
- (iii) „Biege-welle“ versus Paddelbewegung
- (iv) Schwimgeschw. versus $\omega^{1/4}$
 (verschied. B_x, B_y, a, L)
 \rightarrow Maximum!
 \rightarrow Modellierung um bessere Verständnis!