

11.3 Stochastische Differentialgleichung II

(i) Ito-Interpretation: mit $dW(t) = dw \sqrt{dt}$ (11.11)

$$\boxed{\begin{aligned} dx(t) &= h(x,t) dt + g(x,t) dw \sqrt{dt} \\ \text{mit } \langle dw \rangle &= 0 \\ \langle d^2 w \rangle &= 1 \end{aligned}} \quad (11.12)$$

... SDG in Ito-Interpretation

(ii) Stratonovich-Interpretation:

$$\boxed{\begin{aligned} dx(t) &= h(x,t) dt + g(x,t) \circ dw \sqrt{dt} \\ \text{mit } \langle dw \rangle &= 0 \\ \langle d^2 w \rangle &= 1 \end{aligned}} \quad (11.13)$$

↑
verwende
Stratonovich
Regel

... SDG in Stratonovich-Interpretation

Beweis:

$$g(x,t) \circ dW(t) = g\left(\frac{x(t)+x(t+dt)}{2}, \frac{t+t+dt}{2}\right) dW(t) = g\left(x(t) + \frac{dx}{2}, t + \frac{dt}{2}\right) dW(t)$$

$$\stackrel{\text{Taylor}}{=} \left[g(x,t) + \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x} dx + \dots \right] dW(t) + O(dt^{3/2})$$

Taste bis wdt

$$\text{mit } dx \approx g(x,t) dW + O(dt)$$

$$= g(x,t) dW(t) + \frac{1}{2} g \frac{\partial g}{\partial x} \underbrace{dW^2(t)}_{= dt} + O(dt^{3/2}) \quad (11.14)$$

... "im quadrat. Mittel"
weiterer Driftterm!

Beachte: $g, \frac{\partial g}{\partial x}$ bei x, t

also: (11.13) mit (11.14) random induzierter Driftterm

$$\rightarrow \boxed{dx(t) = \left[h(x,t) + \frac{1}{2} g(x,t) \frac{\partial g(x,t)}{\partial x} \right] dt + g(x,t) dw \sqrt{dt}} \quad (11.15)$$

... SDG in Stratonovich-Interpretation
aber in Ito-Form

- Kramers-Moyal-Koeffizienten: „Signaturen einer SDG“!

$$D^n(x) = \frac{1}{n!} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle [x(t+\tau) - x]^n \rangle \quad (M.16)$$

(i) Ito-SDG: lese direkt von (M.12) ab $[\tau \rightarrow dt]$

$$\begin{aligned} D^{(1)}(x,t) &= h(x,t) \\ D^{(2)}(x,t) &= \frac{1}{2} g^2(x,t) \end{aligned} \quad (M.17)$$

$n=2: \frac{(dx)^2}{g^2 dt} \rightarrow$

(ii) Stratonovich-SDG: aus (M.15)

$$\begin{aligned} D^{(1)}(x,t) &= h(x,t) + \frac{1}{2} g(x,t) \frac{\partial g(x,t)}{\partial x} \\ D^{(2)}(x,t) &= \frac{1}{2} g^2(x,t) \end{aligned} \quad (M.18)$$

- mehrdimensionale SDG: $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= h_i(x,t) + g_{ij}(x,t) T_j(t) \\ \text{mit } \langle T_j(t) \rangle &= 0, \quad \langle T_j(t) T_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t-t') \end{aligned} \quad (M.19)$$

(i) Ito-Interpretation:

$$\begin{aligned} dx_i(t) &= h_i(x,t) dt + g_{ij}(x,t) dw_j \sqrt{dt} \\ \text{mit } \langle dw_i \rangle &= 0 \\ \langle dw_i dw_j \rangle &= \delta_{ij} \\ \rightarrow D_i^{(1)}(x,t) &= h_i(x,t) \\ D_{ij}^{(2)}(x,t) &= \frac{1}{2} g_{ik}(x,t) g_{jk}(x,t) \end{aligned} \quad (M.20)$$

(ii) Stratonovich-Interpretation: [o.B.]

$$\begin{aligned} dx_i(t) &= h_i(x,t) dt + g_{ij}(x,t) \circ dw_j \sqrt{dt} \\ \rightarrow dx_i(t) &= D_i^{(1)}(x,t) dt + g_{ij}(x,t) dw_j \sqrt{dt} \\ \text{mit } \langle dw_i \rangle &= 0 \\ \langle dw_i dw_j \rangle &= \delta_{ij} \\ \rightarrow D_i^{(1)}(x,t) &= h_i(x,t) + \frac{1}{2} g_{kj}(x,t) \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}(x,t) \end{aligned} \quad (M.21)$$

$$D_{ij}^{(a)}(x,t) = \frac{1}{2} g_{i\leftarrow}(x,t) g_{j\leftarrow}(x,t)$$

- Anwendung der verschiedenen Interpretationen:
 - physikalische Prozesse (kontinuierliche) mit Korrelationen auf kleiner Zeitskala ε :

also: idealisiert $\langle T(t)T(t') \rangle = \delta(t-t'), t-t' > \varepsilon$
 Realität $\langle T(t)T(t') \rangle = \delta_\varepsilon(t-t'), \forall t-t'$



→ Stratonovich-Interpretation!

Warum? vgl. Berechnung von $D^{(a)}$ in Kap. 10.3:

$$(1) A = \left\langle \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} T(t')T(t'') dt' dt'' \right\rangle = \frac{\tau}{2}$$

mit $\langle T(t')T(t'') \rangle = \delta_\varepsilon(t-t')$

(2) über Wiener Prozess:

$$A_S = \left\langle \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} dW(t') dW(t'') \right\rangle$$

$$= \left\langle \int_t^{t+\tau} [W(t'') - W(t')] dW(t'') \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{W^2(t+\tau) - W^2(t)}{2} - W(t)[W(t+\tau) - W(t)] \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2} (t+\tau - t) - t + t = \frac{\tau}{2}$$

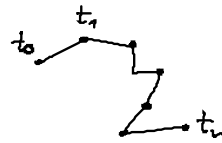
also: $A = A_S = \frac{\tau}{2}$

aber: $A_I = 0!$

(ii) Biologie: oft diskrete Prozesse → Ito-Interpretation

(iii) Analyse von Zeitreihen:

Bsp: Zufallsweg eines Mikroorganismus



→ $x(t_i), i=0, \dots$

verwende einfachere Ito-Interpretation!

• Beispiel:

$$\begin{aligned} \dot{x} + \beta_{ij} x_j &= T_i(t) \quad i=1, \dots, N \\ \langle T_i(t) \rangle &= 0, \quad \langle T_i(t) T_j(t') \rangle = q_{ij} S(t-t') \quad q_{ij} = q_{ji} \end{aligned} \quad (11.22)$$

... Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

Kann: (1) lineare SDG

(2) q_{ij} ... Stärke des Rauschens

(3) $N=1, x \rightarrow v$... 1D-Brownsche Bewegung mit Trägheit

(4) $\beta_{ij}=0$... Wiener-Prozess!

Lösungen: ... s. H. Risken, Die Fokker-Planck Equation (Springer)

11.4 Die Fokker-Planck-Gleichung

• Motivation: DGL für $P(x,t)$

mit $P(x,t) dx$... Wahrscheinl. Systeme zur Zeit t
in $[x, x+dx]$ anzutreffen

→ Beschg von Momenten und Zeitkorrelationsfunktionen
≅ Meßgrößen des stochast. Prozesses

a) Kramers-Moyal-Entwicklung

• Führe ein: Propagator = bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(x, t+\tau | x', t) \dots \text{für } x \text{ bei } t+\tau, \text{ wenn } x' \text{ bei } t \text{ mit Sicherheit vorliegt}$$

$$\text{damit: } P(x, t+\tau) = \int P(x, t+\tau | x', t) P(x', t) dx' \quad (11.24)$$

NB: Markov-Prozess! $P(x,t)$ hängt nur von unmittelbarer Vergangenheit ab!

• Ziel: Gl. für $\frac{\partial P}{\partial t}$

(i) Berechne:

$$P(x, t+\tau | x', t) P(x', t) \stackrel{(11.24)}{=} P(x+\Delta-\Delta, t+\tau | x-\Delta, t) P(x-\Delta, t) \quad (11.25)$$

neue Variable: $x' \rightarrow \Delta$
 $\Delta = x - x'$

$$\stackrel{\text{Taylor}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Delta^n \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n [P(x+\Delta, t+\tau | x, t) P(x, t)]$$

erste Umkehrung
neue Pkt. in x mit Δ als Index

(ii) also:

$$P(x, t+\tau) \stackrel{(11.24)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (11.25) dx'$$

$$\text{mit } \int_{-\infty}^{\infty} dx' \stackrel{\Delta = x-x'}{=} \int_{\infty}^{-\infty} \dots d\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} \dots d\Delta$$

$d\Delta = -dx'$
x fest

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Delta^n P(x+\Delta, t+\tau | x, t) d\Delta P(x, t) \right]$$

niester Mantel: $\langle [x(t+\tau) - x(t)]^n \rangle$

insbes.: $\langle [\]^0 \rangle = \langle 1 \rangle = 1!$ Normierung

$$= \underbrace{P(x, t)}_{\text{um } n=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left[\frac{\langle [x(t+\tau) - x(t)]^n \rangle}{n!} P(x, t) \right]$$

$$= D^{(n)}(x, t) \tau + O(\tau^2)$$

... Kramers-Moyal-Koeff. (11.26)

$$\text{mit } \frac{P(x, t+\tau) - P(x, t)}{\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \frac{\partial P(x, t)}{\partial t}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = L_{KM}(x, t) P(x, t)} \quad (11.26)$$

$$\text{mit } L_{KM} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n [D^{(n)}(x, t) \dots]$$

... Kramers-Moyal-(Vorwärts)-Entwicklung

$\hat{=}$ propagiert vorwärts in der Zeit!

NB: Propagator $P(x, t | x', t')$... Lsg. von (11.26) mit Anfangsbed. $P(x, t') = \delta(x - x')$!

• Berechnung von

(i) Momenten: $\langle x^n(t) \rangle = \int x^n P(x,t) dx$

(ii) Zeitkorrelationsfktn:

$$\langle x(t)x(t') \rangle = \iint x x' \underbrace{P(x,t; x',t')}_{\substack{\text{Wahrsch. } x \text{ bei } t \text{ und} \\ x' \text{ bei } t' \text{ anzutreffen}}} dx dx'$$

$$= \iint x x' P(x,t|x',t') P(x',t') dx dx' \quad (11.28)$$

[vgl. Kap. 9.3]

NB: im Ren GG: $P(x',t') = P(x') \sim e^{-E(x')/k_B T}$

• Kramers-Moyal- (Rückwärts-) Entwicklung: o.B.

$$\frac{\partial P(x,t|x',t')}{\partial t} = -L_{KM}^+(x',t') P(x,t|x',t')$$

mit adj. Operator: $L_{KM}^+(x',t') = \sum_{n=1}^{\infty} D^n(x',t') \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^n$

(11.29)

... „propagiert rückwärts in der Zeit!“

NB: L_{KM}^+ adjungiert zu L_{KM} aus (11.26)

Beweis: Berechne

$$\langle g(x) | L_{KM} | f(x) \rangle$$

$$\xrightarrow{\text{ein Summ}} \langle g(x) | \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n D^{(n)}(x) | f(x) \rangle$$

$$= \int g(x) \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n D^{(n)}(x) f(x) dx$$

$$= \int \underbrace{\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) \left[g(x) \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-1} D^{(n)}(x) f(x) \right]}_{=0 \text{ mit } g(\pm\infty)=0^*} dx$$

$$+ \int \left[\frac{\partial}{\partial x} g(x) \right] \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-1} D^{(n)}(x) f(x) dx$$

⋮

$$= \int \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n g(x) \right] D^{(n)}(x) f(x) dx \quad \text{qed}$$