11.3 Stochastische Differentialgleichung II

(i) Ito-Interpretation: mit $\boxed{dW(t) = dw\sqrt{dt}}$ (11.11)

$$\boxed{\begin{aligned} dx(t) &= h(x,t)\,dt + g(x,t)\,dw\sqrt{dt} \\ \text{mit } &\langle dw\rangle = 0 \\ &\langle d^2w\rangle = 1 \end{aligned}} \quad (11.12)$$

... SDG in Ito-Interpretation

(ii) Stratonovich-Interpretation:

$$\boxed{\begin{aligned} dx(t) &= h(x,t)\,dt + g(x,t)\circ dw\sqrt{dt} \\ \text{mit } &\langle dw\rangle = 0 \\ &\langle dw^2\rangle = 1 \end{aligned}} \quad (11.13)$$

verwende Stratonovich Regel

... SDG in Stratonovich-Interpret.

Rechne:

$$g(x,t)\circ dW(t) = g\left(\frac{x(t)+x(t+dt)}{2}, \frac{t+t+dt}{2}\right)dW(t) = g\left(x(t)+\frac{dx}{2}, t+\frac{dt}{2}\right)dW(t)$$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} \left[g(x,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{x,t} dx + \ldots\right] dW(t) + O(dt^{2/2})$$

Terme bis $\sim dt$

mit $dx \approx g(x,t)\,dW + O(dt)$

$$= g(x,t)\,dW(t) + \underbrace{\frac{1}{2} g\frac{\partial g}{\partial x}\underbrace{dW^2(t)}_{\text{"="}\,dt}}_{\text{weiterer Driftterm!}} + O(dt^{3/2}) \quad (11.14)$$

... „im quadrat. Mittel"

Beachte: $g, \frac{\partial g}{\partial x}$ bei x,t

also: (11.13) mit (11.14)

rauschinduzierter Driftterm

$$\rightarrow \boxed{dx(t) = \left[h(x,t) + \frac{1}{2}g(x,t)\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}\right]dt + g(x,t)\,dw\sqrt{dt}} \quad (11.15)$$

... SDG in Stratonovich-Interpretation aber in Ito-Form

• Kramers-Moyal-Koeffizienten: „Signaturen einer SDG"!

$$D^n(x) = \frac{1}{n!} \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \langle \underbrace{[x(t+\tau)-x]}_{dx}{}^n \rangle \quad (11.16)$$

(i) Ito-SDG: lese direkt von (11.12) ab $[\tau \to dt]$

$n=2$: $(dx)^2 = g^2 dw^2 dt + \ldots$

$$\boxed{\begin{aligned} D^{(1)}(x,t) &= h(x,t) \\ D^{(2)}(x,t) &= \frac{1}{2} g^2(x,t) \end{aligned}} \quad (11.17)$$

(ii) Stratonovich-SDG: aus (11.15)

$$\boxed{\begin{aligned} D^{(1)}(x,t) &= h(x,t) + \frac{1}{2} g(x,t) \frac{\partial g(x,t)}{\partial x} \\ D^{(2)}(x,t) &= \frac{1}{2} g^2(x,t) \end{aligned}} \quad (11.18)$$

• mehrdimensionale SDG: $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{x}_i = h_i(\underline{x},t) + g_{ij}(\underline{x},t)\, \Gamma_j(t) \\ &\text{mit } \langle \Gamma_j(t) \rangle = 0, \quad \langle \Gamma_i(t) \Gamma_j(t') \rangle = \delta_{ij}\, \delta(t-t') \end{aligned}} \quad (11.19)$$

(i) Ito-Interpretation:

$$\boxed{\begin{aligned} &dx_i(t) = h_i(\underline{x},t)\,dt + g_{ij}(\underline{x},t)\, dw_j \sqrt{dt} \\ &\text{mit} \quad \langle dw_i \rangle = 0 \\ &\qquad\quad \langle dw_i dw_j \rangle = \delta_{ij} \\ &\longrightarrow D_i^{(1)}(\underline{x},t) = h_i(\underline{x},t) \\ &\qquad\; D_{ij}^{(2)}(\underline{x},t) = \frac{1}{2} g_{ik}(\underline{x},t)\, g_{jk}(\underline{x},t) \end{aligned}} \quad (11.20)$$

(ii) Stratonovich-Interpretation: [o.B.]

$$\boxed{\begin{aligned} &dx_i(t) = h_i(\underline{x},t)\,dt + g_{ij}(\underline{x},t) \circ dw_j \sqrt{dt} \\ &\longrightarrow dx_i(t) = D_i^{(1)}(\underline{x},t)\,dt + g_{ij}(\underline{x},t)\, dw_j \sqrt{dt} \\ &\qquad \text{mit } \langle dw_i \rangle = 0 \\ &\qquad\qquad \langle dw_i dw_j \rangle = \delta_{ij} \\ &\longrightarrow D_i^{(1)}(\underline{x},t) = h_i(\underline{x},t) + \frac{1}{2} g_{kj}(\underline{x},t) \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}(\underline{x},t) \end{aligned}} \quad (11.21)$$

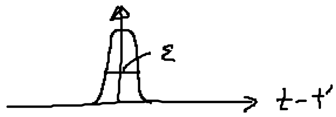
$$\boxed{D^{(1)}_{ij}(x,t) = \frac{1}{2}\, g_{ik}(x,t)\, g_{jk}(x,t)}$$

- Anwendung der verschiedenen Interpretationen:

  (i) physikalische Prozesse (kontinuierliche) mit Korrelationen auf kleiner Zeitskala ε:

  also: idealisiert $\langle \Gamma(t)\Gamma(t')\rangle = \delta(t-t')\,, \quad t-t' > \varepsilon$

  Realität $\langle \Gamma(t)\Gamma(t')\rangle = \delta_\varepsilon(t-t')\,, \quad \forall\, t-t'$



$\longrightarrow$ Stratonovich-Interpretation!

Warum? vgl. Herleitung von $D^{(1)}$ in Kap. 10.3:

(1) $A = \left\langle \int_t^{t+\tau}\int_t^{t'} \Gamma(t')\Gamma(t'')\,dt''\,dt' \right\rangle = \frac{\tau}{2}$

mit $\langle \Gamma(t')\Gamma(t'')\rangle = \delta_\varepsilon(t-t')$

(2) über Wiener-Prozeß:

$$A_S = \left\langle \int_t^{t+\tau}\int_t^{t'} dW(t'')\,dW(t') \right\rangle$$

$$= \left\langle \int_t^{t+\tau} [W(t') - W(t)]\,dW(t') \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{W^2(t+\tau) - W^2(t)}{2} - W(t)[W(t+\tau) - W(t)] \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2}(t+\tau-t) - t + t = \frac{\tau}{2}$$

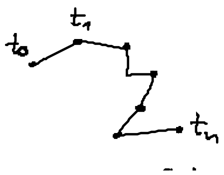
also: $A = A_S = \frac{\tau}{2}$

aber: $A_I = 0$!

(ii) Biologie: oft diskrete Prozesse $\longrightarrow$ Ito-Interpretation

(iii) Analyse von Zeitreihen:

Bsp: Zufallsweg eines Mikroorganismus



$\longrightarrow x(t_i),\ i=0,\dots$

verwende einfachere Ito-Interpretation!

- Beispiel:

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{x} + \gamma_{ij} x_j = \Gamma_i(t) \qquad i = 1,\dots,N \\ &\langle \Gamma_i(t)\rangle = 0\,, \quad \langle \Gamma_i(t)\Gamma_j(t')\rangle = q_{ij}\,\delta(t-t') \qquad q_{ij} = q_{ji} \end{aligned}} \qquad (11.22)$$

... Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß

Bem.: (1) lineare SDG

(2) q_{ij} ... Stärke des Rauschens

(3) $N=1$, $x \to v$ ... 1D-Brownsche Bewegung mit Trägheit

(4) $\gamma_{ij} = 0$ ... Wiener-Prozeß!

Lösungen: .... s. H. Risken, The Fokker-Planck Equation (Springer)

11.4 Die Fokker-Planck-Gleichung

- Motivation: DGl. für $P(x,t)$
  mit $P(x,t)\,dx$ ... Wahrscheinl. System zur Zeit t in $[x, x+dx]$ anzutreffen

  $\longrightarrow$ Berechnung von Momenten und Zeitkorrelationsfunktionen
  $\triangleq$ Meßgrößen des stochast. Prozesses

a) Kramers-Moyal-Entwicklung

- Führe ein: Propagator = bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\boxed{P(x, t+\tau \,|\, x', t) \ \text{... für } x \text{ bei } t+\tau, \text{ wenn } x' \text{ bei } t \text{ mit Sicherheit vorliegt}}$$

damit: $$P(x, t+\tau) = \int P(x, t+\tau \,|\, x', t)\, P(x', t)\, dx' \qquad (11.24)$$

NB: Markov-Prozeß! $P(x,t)$ hängt nur von unmittelbarer Vergangenheit ab!

• Ziel: Gl. für $\frac{\partial P}{\partial t}$

(i) Berechne:

neue Variable: $x' \to \Delta$, $\Delta = x - x'$

$$P(x,t+\tau|x',t)\,P(x',t) = P(x+\Delta-\Delta,\, t+\tau \,|\, x-\Delta, t)\, P(x-\Delta,t)$$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, \Delta^n \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \Big[\underbrace{P(x+\Delta,\, t+\tau|x,t)}_{\text{neue Fkt. in } x \text{ mit } \Delta \text{ als Index}}\; P(x,t)\Big] \qquad (11.25)$$

feste Verschiebung

(ii) also:

$$P(x,t+\tau) \overset{(11.24)}{=} \int (11.25)\, dx'$$

$$\text{mit } \int_{-\infty}^{\infty} \dots\, dx' \underset{\substack{\Delta = x-x' \\ d\Delta = -dx' \\ x \text{ fest}}}{=} -\int_{\infty}^{-\infty} \dots\, d\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} \dots\, d\Delta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \Big[\underbrace{\int \Delta^n P(x+\Delta,\, t+\tau|x,t)\, d\Delta}_{n\text{-tes Moment: } \langle [x(t+\tau)-x(t)]^n \rangle}\; P(x,t)\Big]$$

insbes: $\langle [\;]^0 \rangle = \langle 1 \rangle = 1$! Normierung

$$= \underbrace{P(x,t)}_{\text{von } n=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \Big[\underbrace{\frac{\langle [x(t+\tau)-x(t)]^n \rangle}{n!}}_{= D^{(n)}(x,t)\,\tau + O(\tau^2)}\; P(x,t)\Big]$$

... Kramers-Moyal-Koeff. (10.26)

$$\text{mit } \frac{P(x,t+\tau) - P(x,t)}{\tau} \xrightarrow[\tau \to 0]{} \frac{\partial P(x,t)}{\partial t}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = L_{KM}(x,t)\, P(x,t) \\ &\text{mit } L_{KM} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left[D^{(n)}(x,t) \dots\right] \end{aligned}} \qquad (11.26)$$

... Kramers-Moyal-(Vorwärts)-Entwicklung

≙ propagiert vorwärts in der Zeit!

<u>NB:</u> Propagator $P(x,t|x',t')$ ... Lsg. von (11.26) mit Anfangsbed. $P(x,t') = \delta(x-x')$!

• Berechnung von

(i) Momenten: $\langle x^n(t)\rangle = \int x^n P(x,t)\, dx$

(ii) Zeitkorrelationsfktn:

$$\langle x(t)\, x(t')\rangle = \iint x\, x' \underbrace{P(x,t;\, x' t')}_{\text{Wahrsch. } x \text{ bei } t \text{ und } x' \text{ bei } t' \text{ anzutreffen}} dx\, dx'$$

$$= \iint x x' \, P(x,t|x',t')\, P(x',t')\, dx\, dx' \qquad (11.28)$$

[vgl. Kap. 9.3]

N.B.: im therm. GG.: $P(x',t') = P(x') \sim e^{-E(x')/k_B T}$

• Kramers-Moyal- (Rückwärts-) Entwicklung: o.B.

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial P(x,t|x',t')}{\partial t'} = -L^{+}_{KM}(x',t')\, P(x,t|x',t') \\ \text{mit adj. Operator: } L^{+}_{KM}(x',t') = \sum_{n=1}^{\infty} D^n(x',t')\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^n\end{gathered}} \qquad (11.29)$$

... „propagiert rückwärts in der Zeit!"

N.B.: L^{+}_{KM} adjungiert zu L_{KM} aus (11.26)

Beweis: Berechne

$\langle g(x)|L_{KM}|f(x)\rangle$

$$\xrightarrow[\text{Sum.}]{\text{ein}} \langle g(x)|\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n D^{(n)}(x)|\, f(x)\rangle$$

$$= \int g(x) \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n D^{(n)}(x)\, f(x)\, dx$$

$$= \underbrace{\int\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[g(x)\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-1} D^{(n)}(x)\, f(x)\right] dx}_{=0 \text{ mit } g(\pm\infty) = 0}$$

$$+ \int\left[\frac{\partial}{\partial x} g(x)\right]\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-1} D^{(n)}(x)\, f(x)\, dx$$

$$\vdots$$

$$= \int \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n g(x)\right] D^{(n)}(x)\, f(x)\, dx \qquad \text{qed}$$