

c) spezielle Tensoren:

• Zerlegung: 
$$\underline{I} = \underline{I}_s + \underline{I}_A$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{I} + \underline{I}^t)}_{\text{symmetr.}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{I} - \underline{I}^t)}_{\text{antisymmetr.}} \quad (2.24)$$

• Einheits tensor:  $\underline{1} = \delta_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$

d) Algebra: (wie Matrizen)

• Addition:  $\underline{C} = \underline{A} + \underline{B} \longrightarrow C_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{C} \underline{e}_j = A_{ij} + B_{ij}$   
 • skalare Multiplikation:  $\underline{C} = p \underline{A} \longrightarrow C_{ij} = p A_{ij}, p \in \mathbb{R}$   
 • Multiplikation von Tensoren:  
 $\underline{C} = \underline{A} \underline{B} \xrightarrow{\underline{C} \underline{a} = \underline{A}(\underline{B} \underline{a})} C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$   
 $\neq \underline{B} \underline{A}$   
 • Inverser Tensor:  $\underline{I}^{-1} \quad \underline{I} \underline{I}^{-1} = \underline{1} \longrightarrow T_{ik} (\underline{I}^{-1})_{kj} = \delta_{ij}$   
 • Spurbildung:  $Sp \underline{I} = T_{ii}$

e) Drehungen:

• Drehung der ONB:  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} \longrightarrow \{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}$

$$\underline{e}'_i = D_{ij} \underline{e}_j \quad (2.25) \quad \longrightarrow \quad \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_k = D_{ik} \quad (2.26a)$$

$$\underline{e}'_i \cdot \underline{e}'_k = \delta_{ik} \xrightarrow{\underline{e}'_i = D_{ij} \underline{e}_j} D_{ij} D_{kj} = \delta_{ik} \quad (2.27) \quad (D_{ij} \underline{e}_j) \cdot \underline{e}_k$$

$$\underline{D} \underline{D}^t = \underline{1}$$

• aktiver Standpunkt:

$$\underline{I} = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \xrightarrow[\underline{I}]{\text{gedreht}} D \underline{I} := T_{kl} \underline{e}'_k \otimes \underline{e}'_l$$

$$= T_{kl} D_{ki} D_{lj} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

gedrehtes  $\underline{I}$   
in ONB  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$

$$D \underline{I} = [D \underline{I}]_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$[D \underline{I}]_{ij} = T_{kl} D_{ki} D_{lj} \quad (2.28)$$

$$= D_{ik}^t T_{kl} D_{lj}$$

• passiver Standpunkt:  $\underline{I}$  in  $\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}$  ?

also.  $\underline{I} = T_{kl} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l = T'_{ij} \underline{e}'_i \otimes \underline{e}'_j$

→ Transform von Tensor komp:

$$\underline{T}'_{ij} \stackrel{(2.16)}{=} \underline{e}'_i \cdot \underline{I} \underline{e}'_j = \underline{e}'_i \cdot (T_{kl} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) \underline{e}'_j \stackrel{(2.16)}{=} T_{kl} \underbrace{\underline{e}'_i \cdot \underline{e}_k}_{D_{ik}} \underbrace{\underline{e}_l \cdot \underline{e}'_j}_{D_{jl}}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow & \boxed{T'_{ij} = D_{ik} D_{jl} T_{kl}} \\ \rightarrow & \boxed{T_{ij} = D_{ik}^+ D_{jl}^+ T'_{kl}} \end{aligned} \quad (2.28)$$

f) Diagonalisierung eines symmetrischen  $\underline{I}$ :

- "Tensor begreifen"
- Eigenwertproblem:

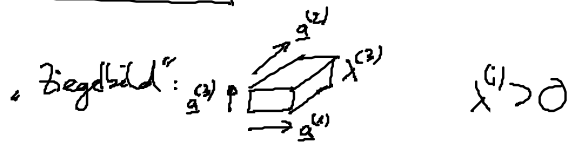
$$\boxed{\underline{I} \underline{a} = \lambda \underline{a}} \quad (2.30)$$

Eigenvektor (EV)      Eigenwert  $\lambda$

mit  $\underline{a}^{(i)} \cdot \underline{a}^{(j)} = \delta_{ij}$   
 $\lambda^{(i)} \in \mathbb{R}$

• Darstellung von  $\underline{I}$  in Eigenvektor-Basis:  $\{\underline{a}^{(1)}, \underline{a}^{(2)}, \underline{a}^{(3)}\}$ :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{I} &= T'_{ij} \underline{a}^{(i)} \otimes \underline{a}^{(j)} = \sum_i \lambda^{(i)} \underline{a}^{(i)} \otimes \underline{a}^{(i)} \\ T'_{ij} &= \lambda^{(i)} \delta_{ij}, \quad \underline{I}' = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & & 0 \\ & \lambda^{(2)} & \\ 0 & & \lambda^{(3)} \end{pmatrix} \end{aligned}} \quad (2.32)$$



## 2.3 Vektor-/Tensoranalysis

• Motivation:  
i.f. Kontinuumsmechanik  $\leftrightarrow$  Felder

(1) Skalarfelder:  $f(\underline{r}, t) \in \mathbb{R}$  ... Masse dichte  
Temperatur  
Ladungsdichte etc.

(2) Vektorfelder:  $\underline{v}(\underline{r}, t) \in V_p$  ... Geschwindigkeit  
Impuls(dichte)  
Kraft(dichte) etc.

(3) Tensorfelder:  $\underline{\underline{T}}(\underline{r}, t) \in V_p \times V_p$  ... Spannungstensor  
Deformationsrate

Wie verändern sich diese Felder lokal?

a) vollständiges Differential

• Skalarfeld  $f(\underline{r}, t)$ : 
$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad (2.33)$$

$\{x_1, x_2, x_3\}$  ... beliebige krummlinige  
Koordinate

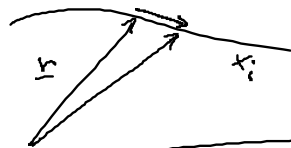
• ebenso: 
$$\begin{aligned} d\underline{v} &= \frac{\partial v}{\partial x_i} dx_i \\ d\underline{\underline{T}} &= \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial x_i} dx_i \end{aligned}$$

b) Nabla-Operator:

• Def: 
$$\text{Führe „Gradient von } f“ = \text{grad } f \text{ als Vektor ein,} \quad (2.35)$$
  
so daß  $df(\underline{r}) = \text{grad } f \cdot d\underline{r}$

mit  $d\underline{r} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} dx_i = \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} \right| \underline{e}_i dx_i \quad (2.35a)$

und  $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$  (ONB)



folgt 
$$\text{grad } f = \frac{1}{\left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} \right|} \frac{\partial f}{\partial x_i} \underline{e}_i \quad (2.36)$$

... Gradient von  $f$

• (2.36) legt nahe  $f =$  ONB:

Def: 
$$\text{Nabla-Operator} = \text{Vektor-Differentialoperator} \quad (2.37)$$
  
$$\underline{\nabla} = \underline{e}_i \frac{1}{\left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} \right|} \frac{\partial}{\partial x_i} \in V_p, \quad \nabla_i = \frac{1}{\left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} \right|} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

so dass,  $\text{grad } f = \underline{\nabla} f$

- Kartesische Koordinaten:

$$\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial x_i} \right| = 1 \rightarrow \underline{\nabla} = \underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \underline{e}_i \nabla_i \quad (2.28)$$

dann Gradient

$$\begin{aligned} \text{eines Skalarfeldes } f: (\underline{\nabla} f)_i &= \nabla_i f = f_{,i} \\ \text{" Vektor " } \underline{v}: (\underline{\nabla} \otimes \underline{v})_{ij} &= \nabla_i v_j = v_{j,i} \\ \text{" Tensor " 2.St. } \underline{I}: (\underline{\nabla} \otimes \underline{I})_{ijk} &= \nabla_i T_{jk} = T_{j,k,i} \end{aligned} \quad (2.29)$$

NB: Tensorstufe erhöht sich um 1 bei Gradientenbildung!

- Zylinder-, Kugelkoordinaten:  $\nabla_i = \frac{1}{\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial x_i} \right|} \frac{\partial}{\partial x_i}$  und  $\nabla_i \underline{e}_j \neq 0$

also Gradient

$$\begin{aligned} \text{eines Vektorfeldes: } \underline{\nabla} \otimes \underline{v} &= (\underline{e}_i \nabla_i) \otimes (v_j \underline{e}_j) \\ &= (\nabla_i v_j) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j + v_j \underline{e}_i \otimes \nabla_i \underline{e}_j \\ \text{" Tensorfeldes: } (\underline{\nabla} \otimes \underline{I}) &= (\underline{e}_i \nabla_i) \otimes (\underline{T}_{kl} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) \end{aligned} \quad (2.40)$$

s. Übungen

c) Divergenzbildung

- "Kontraktion über Indexpaar"  $\rightarrow$  Reduktion um 2 Tensorstufe

- Kartesische Koord.:

$$\text{Divergenz eines Vektors } \underline{v}: \text{div } \underline{v} = \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \nabla_i v_i = v_{i,i} \quad (2.41)$$

$$\text{Tensor 2. Stufe } \underline{\nabla} \otimes \underline{v} \rightarrow \text{Skalar } \underline{\nabla} \cdot \underline{v} \quad (2.42)$$

$$\text{Divergenz eines Tensors 2.St. } \underline{I}: (\text{div } \underline{I})_i = (\underline{\nabla} \underline{I})_i = \nabla_j T_{ij} = T_{j,i,j}$$

$$\underline{\nabla} \otimes \underline{I} \rightarrow \text{Vektor } \text{div } \underline{I} \quad \text{Konvention!}$$

- Zylinder-, Kugelkoord.: (s. Übungen)

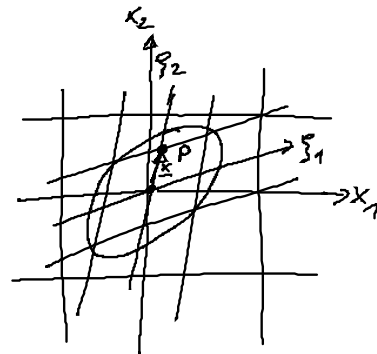
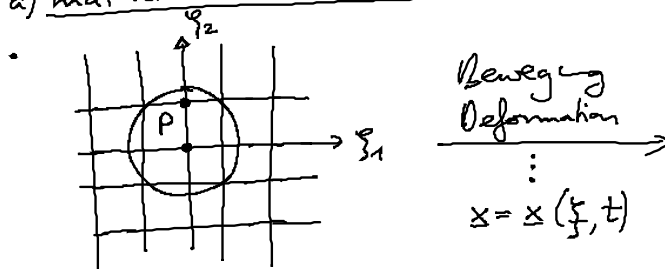
### 3. Hydrodynamik Newtonscher Flüssigkeiten

- Ziel: (i) Vollständige Beschreibung der Dynamik zäher Flüssigkeiten  
(ii) Beispielhafte Vorgehensweise für Behandlung anderer Kontinua

#### 3.1 Kinematik

- Ziel: Beschreibung des dynam. Zustandes von Kontinua/Flüssigkeiten:  
Variablen, Zeit ableitbar

##### a) materielle und räumliche Koordinaten



Kontinuum im Referenzzustand  
Bsp: undeformierter Zustand

$\xi$  ... materielle oder Lagrange-  
sche Koordinaten,  
induziert Punkt  $P = P(\xi)$   
des Kontinuums

Ortsvektor  $x$  bzw.  $x_1, x_2, x_3$   
... räumliche oder Eulersche  
Koordinaten von  $P$  bzgl.  
festes räuml. KOS  
(Labor system)

- Felder:  
 $\mathcal{S}, \mathcal{V}, \mathcal{I}(\xi, t)$  ... materielle Darstellung  $\rightarrow$  elast. Körper  
 $\mathcal{S}, \mathcal{V}, \mathcal{I}(x, t)$  ... räumliche  $\rightarrow$  Flüssigkeiten
- i.f. immer räumliche Darstellung!

b) Konvektionsformel

• beliebiges Feld:  $\varphi(x,t) = \varphi(x(\xi,t),t) = \varphi(\xi,t)$  (3.1)  
 ... physikal. Konvention<sup>4</sup>  
 für Funktionen

• Zeitableitung:

(i)  $\frac{\partial}{\partial t} \varphi(x,t)$  ... lokale Zeitableitung ( $\hat{=}$  zeitl. Ändg an Ort  $x$ )

(ii)  $\frac{d}{dt} \varphi(x,t) \equiv \frac{d}{dt} \varphi(x,t)$  ... materielle oder substantielle

Zeitableitung ( $\hat{=}$  zeitl. Ändg im  
 Punkt  $P$ , im bewegte  
 Flüssigkeitsvolumen)  
 $\frac{\partial x_i(\xi,t)}{\partial t} = v_i(x,t)$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x,t) + [\nabla_i \varphi(x,t)] \frac{\partial x_i(\xi,t)}{\partial t}$$

$$=$$

$$\rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \underbrace{v \cdot \nabla}_{\text{Konvektionsterm}} \varphi \quad (3.3) \quad \dots \text{Konvektionsformel}$$

lokale  
Zeitabl.

" ableitung

Bsp:  $\frac{d\varphi}{dt} = 0 \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \underbrace{v \cdot \nabla}_{\text{lokale zeitl. Ändg}} \varphi$   
 aufgrund Strömung