c) spezielle Tensoren:

- Zerlegung:

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{\underline{T}} &= \underline{\underline{T}}_S + \underline{\underline{T}}_A \\ &= \underbrace{\tfrac{1}{2}(\underline{\underline{T}}+\underline{\underline{T}}^t)}_{\text{symmetr.}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(\underline{\underline{T}}-\underline{\underline{T}}^t)}_{\text{antisymmetr.}}\end{aligned}} \qquad (2.24)$$

- Einheitstensor: $\underline{\underline{1}} = \delta_{ij} \; \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$

d) Algebra: (wie Matrizen)

$$\left.\begin{array}{l}
\cdot \text{ Addition: } \quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} \longrightarrow C_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{C}}\,\underline{e}_j = A_{ij} + B_{ij} \\
\cdot \text{ skalare Multiplikation: } \quad \underline{\underline{C}} = p\underline{\underline{A}} \longrightarrow C_{ij} = p\, A_{ij} \quad , p \in \mathbb{R} \\
\cdot \text{ Multiplikation von Tensoren:} \\
\qquad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \xrightarrow{\underline{\underline{C}}\underline{a} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\underline{a})} C_{ij} = A_{ik} B_{kj} \\
\qquad \neq \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} \\
\cdot \text{ Inverser Tensor: } \underline{\underline{T}}^{-1} \qquad \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{1}} \longrightarrow T_{ik} (\underline{\underline{T}}^{-1})_{kj} = \delta_{ij} \\
\cdot \text{ Spurbildung: } \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{T}} = T_{ii}
\end{array}\right\} \quad (2.25)$$

e) Drehungen:

- Drehung der ONB: $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} \longrightarrow \{\underline{e}_1', \underline{e}_2', \underline{e}_3'\}$

$$\boxed{\underline{e}_i' = D_{ij}\, \underline{e}_j} \quad (2.26) \longrightarrow \boxed{\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_k = D_{ik}} \quad (2.26a)$$

$$(D_{ij}\, \underline{e}_j) \cdot \underline{e}_k$$

$$\xrightarrow{\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_k' = \delta_{ik}} \boxed{\begin{aligned} D_{ij} D_{kj} &= \delta_{ik} \\ \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{D}}^t &= \underline{\underline{1}}\end{aligned}} \quad (2.27)$$

- aktiver Standpunkt:

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij}\; \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \xrightarrow[\underline{\underline{T}}]{\text{gedrehtes}} D\underline{\underline{T}} := T_{kl}\; \underline{e}_k' \otimes \underline{e}_l'$$

$$= T_{kl}\; D_{ki}\, D_{lj}\; \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

gedrehtes $\underline{\underline{T}}$ in ONB $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2 \underline{e}_3\}$

$$\boxed{\begin{aligned} D\underline{\underline{T}} &= [D\underline{\underline{T}}]_{ij}\;\; \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \\ [D\underline{\underline{T}}]_{ij} &= T_{kl}\;\; D_{ki}\, D_{lj} \\ &= D^t_{ik}\; T_{kl}\; D_{lj}\end{aligned}} \quad (2.28)$$

- passiver Standpkt: $\underline{\underline{T}}$ in $\{\underline{e}_1', \underline{e}_2', \underline{e}_3'\}$?

also. $\underline{\underline{T}} = T_{kl}\; \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \overset{!}{=} T_{ij}'\; \underline{e}_i' \otimes \underline{e}_j'$

$\longrightarrow$ Trafo von Tensorkomp.:

$$T_{ij}' \overset{(2.16)}{=} \underline{e}_i' \cdot \underline{\underline{T}}\, \underline{e}_j' = \underline{e}_i' \cdot \left(T_{kl}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l\right) \underline{e}_j' \underset{(2.26a)}{=} T_{kl} \underbrace{\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_k}_{D_{ik}} \underbrace{\underline{e}_l \cdot \underline{e}_j'}_{D_{jl}}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} T_{ij}' &= D_{ik} D_{jl} T_{kl} \\ T_{ij} &= D_{ik}^{+} D_{jl}^{+} T_{kl}' \end{aligned}} \quad (2.29)$$

f) Diagonalisierung eines symmetrischen $\underline{\underline{T}}$:

- „Tensor begreifen"
- Eigenwertproblem:

$$\boxed{\underline{\underline{T}}\, \underline{a} = \lambda\, \underline{a}} \quad (2.30)$$

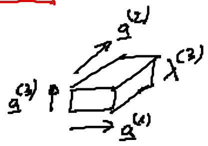
Eigenvektor (EV) $\quad$ Eigenwert λ

mit $\boxed{\begin{gathered} \underline{a}^{(i)} \cdot \underline{a}^{(j)} = \delta_{ij} \\ \lambda^{(i)} \in \mathbb{R} \end{gathered}}$

- Darstellung von $\underline{\underline{T}}$ in Eigenvektor-Basis: $\left\{ \underline{a}^{(1)}, \underline{a}^{(2)}, \underline{a}^{(3)} \right\}$:

$$\boxed{\begin{gathered} \underline{\underline{T}} = T_{ij}'\, \underline{a}^{(i)} \otimes \underline{a}^{(j)} = \sum_i \lambda^{(i)}\, \underline{a}^{(i)} \otimes \underline{a}^{(i)} \\ T_{ij}' = \lambda^{(i)} \delta_{ij} \quad , \quad \underline{\underline{T}}' = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & & 0 \\ & \lambda^{(2)} & \\ 0 & & \lambda^{(3)} \end{pmatrix} \end{gathered}} \quad (2.32)$$

„Ziegelbild":



$\lambda^{(i)} > 0$

2.3 Vektor-/Tensoranalysis

- Motivation:
  i.f. Kontinuumstheorie $\Longleftrightarrow$ Felder

(1) Skalarfelder: $f(\underline{r},t) \in \mathbb{R}$ … Massedichte
Temperatur
Ladungsdichte etc.

(2) Vektorfelder: $\underline{v}(\underline{r},t) \in V_p$ … Geschwindigkeit
Impuls(dichte)
Kraft(dichte) etc.

(3) Tensorfelder: $\underline{\underline{T}}(\underline{r},t) \in V_p \times V_p$ … Spannungstensor
Deformationsrate

Wie verändern sich diese Felder lokal?

a) <u>vollständiges Differential</u>

- Skalarfeld $f(\underline{r},t)$: $$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i} \quad (2.33)$$

$\{x_1, x_2, x_3\}$ … beliebige krummlinige Koordinaten

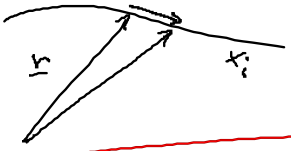
- ebenso: $$\boxed{\begin{aligned} d\underline{v} &= \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i}\, dx_i \\ d\underline{\underline{T}} &= \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial x_i}\, dx_i \end{aligned}}$$

b) <u>Nabla-Operator:</u>

- <u>Def:</u> $\boxed{\text{Führe „Gradient von } f\text{“} = \operatorname{grad} f \text{ als Vektor ein, so daß } df(\underline{r}) = \operatorname{grad} f \cdot d\underline{r}}$ (2.35)

mit $d\underline{r} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\, dx_i = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right| \underline{e}_i\, dx_i$ (2.35a)

und $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$ (ONB)



folgt $$\boxed{\operatorname{grad} f = \frac{1}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right|} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \underline{e}_i} \quad (2.36)$$

… Gradient von f

- (2.36) legt nahe f = ONB:

<u>Def:</u> Nabla-Operator = Vektor-Differentialoperator
$$\underline{\nabla} = \underline{e}_i \frac{1}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right|} \frac{\partial}{\partial x_i} \in V_p\,, \quad \nabla_i = \frac{1}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right|} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.37)$$

so daß, $\operatorname{grad} f = \underline{\nabla} f$

- kartesische Koordinaten:

$$\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right| = 1 \longrightarrow \boxed{\underline{\nabla} = \underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \underline{e}_i \nabla_i} \qquad (2.38)$$

damit Gradient

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{eines Skalarfeldes } f: & (\underline{\nabla} f)_i = \nabla_i f = f_{,i} & \\ \text{" Vektor " } \underline{v}: & (\underline{\nabla} \otimes \underline{v})_{ij} = \nabla_i v_j = v_{j,i} & \\ \text{" Tensor " 2.St. } \underline{\underline{T}}: & (\underline{\nabla} \otimes \underline{\underline{T}})_{ijk} = \nabla_i T_{jk} = T_{jk,i} & \end{array}} \qquad (2.39)$$

NB: Tensorstufe erhöht sich um 1 bei Gradientenbildung!

- Zylinder-, Kugelkoordinaten: $\nabla_i = \frac{1}{\left|\frac{\partial r}{\partial x_i}\right|} \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $\nabla_i \underline{e}_j \neq 0$

also Gradient

$$\left.\begin{array}{ll} \text{eines Vektorfeldes:} & \underline{\nabla} \otimes \underline{v} = (\underline{e}_i \nabla_i) \otimes (v_j \underline{e}_j) \\ & = (\nabla_i v_j)\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j + v_j\, \underline{e}_i \otimes \nabla_i \underline{e}_j \\ \text{" Tensorfeldes:} & (\underline{\nabla} \otimes \underline{\underline{T}}) = (\underline{e}_i \nabla_i) \otimes (T_{kl}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) \end{array}\right\} \quad (2.40)$$

s. Übung

c) Divergenzbildung

- „Kontraktion über Indexpaar" ⟶ Reduktion um 2 Tensorstufen
- kartesische Koord.:

Divergenz eines Vektors $\underline{v}$:

$$\boxed{\operatorname{div} \underline{v} = \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \nabla_i v_i = v_{i,i}} \qquad (2.41)$$

Tensor 2. Stufe $\underline{\nabla} \otimes \underline{v} \longrightarrow$ Skalar $\underline{\nabla} \cdot \underline{v}$

Divergenz eines Tensors 2.St $\underline{\underline{T}}$:

$$\boxed{(\operatorname{div} \underline{\underline{T}})_i = \text{"}(\underline{\nabla}\, \underline{\underline{T}})_i\text{"} = \underbrace{\nabla_j T_{ij}}_{\text{Konvention!}} = T_{ij,j}} \qquad (2.42)$$

$\underline{\nabla} \otimes \underline{\underline{T}} \longrightarrow$ Vektor $\operatorname{div} \underline{\underline{T}}$

- Zylinder-, Kugelkoord.: (s. Übung)

3. Hydrodynamik Newtonscher Flüssigkeiten

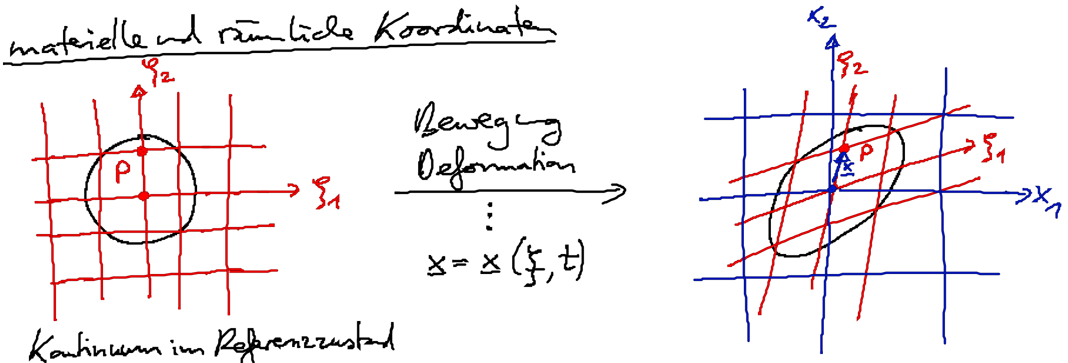
- Ziel: (i) Vollständige Beschreibung der Dynamik zäher Flüssigkeiten
  (ii) Beispielhafte Vorgehensweise für Behandlung anderer Kontinua

3.1 Kinematik

- Ziel: Beschreibung des dynam. Zustandes von Kontinua / Flüssigkeiten: Variablen, Zeitableitungen

a) materielle und räumliche Koordinaten

-



Kontinuum im Referenzzustand
Bsp: undeformierter Zustand
$\underline{\xi}$ ... materielle oder Lagrangesche Koordinaten, indiziert Punkt $P = P(\underline{\xi})$ des Kontinuums

Ortsvektor $\underline{x}$ bzw. x_1, x_2, x_3
.... räumliche oder Eulersche Koordinaten von P bzgl. festes räuml. KOS (Laborsystem)

- Felder:
  $\rho, \underline{v}, \underline{\underline{T}}(\underline{\xi}, t)$ .... materielle Darstellung → elast. Körper
  $\rho, \underline{v}, \underline{\underline{T}}(\underline{x}, t)$ ... räumliche " → Flüssigkeiten
- i.f. immer räumliche Darstellung!

b) Konvektionsformel

- beliebiges Feld: $\varphi(\underline{x},t) = \varphi(\underline{x}(\underline{\xi},t),t) = \varphi(\underline{\xi},t)$ (3.1)

  … „physikal. Konvention“ für Funktionen

- Zeitableitungen:

  (i) $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\underline{x},t)$ … <u>lokale</u> Zeitableitung (≙ zeitl. Änderung am Ort $\underline{x}$)

  (ii) $\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\underline{\xi},t) \equiv \frac{d}{dt}\varphi(\underline{x},t)}$ (3.2) … <u>materielle</u> oder substantielle Zeitableitung (≙ zeitl. Änderung im Punkt P, im bewegten Flüssigkeitsvolumen)

$$= \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\underline{x},t) + [\nabla_i \varphi(\underline{x},t)]\underbrace{\frac{\partial x_i(\underline{\xi},t)}{\partial t}}_{v_i(\underline{x},t)}$$

$$=$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{d\varphi}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}_{\text{lokale Zeitabl.}} + \underbrace{\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\varphi}_{\text{Konvektionsterm „ ableitung}}} \quad (3.3)$$

… Konvektionsformel

Bsp: $\frac{d\varphi}{dt} = 0 \longrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \underbrace{-\,\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\varphi}_{\text{lokale zeitl. Änderung aufgrund Strömung}}$