

3.10 Die Navier-Stokes-Gleichungen

• NS-Gleichungen:

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v} + (\eta + \zeta') \nabla (\operatorname{div} \underline{v}) + \underline{g} \rho \quad (3.62)$$

NB: mit Massenbilanz & Materialgesetz $p(\rho)$: ($T = \text{konstant}$)

4 Gleichungen für \underline{v}, p

• Verhalten unter Zeitumkehr:

$$\left. \begin{array}{l} t \rightarrow -t \\ \underline{v} \rightarrow -\underline{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \eta \nabla^2 \underline{v} \rightarrow -\eta \nabla^2 \underline{v}$$

bricht die Zeitumkehrinvarianz

also: „Dissipation“ von Energie \leftrightarrow Irreversibilität

• Nichtlinearität: $\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \rightarrow$ Turbulenz

• ideale Flüssigkeit: $\eta, \zeta' = 0 \rightarrow$ Eulergleichung
Anwendg.: Dynamik von Gasen

• Flüssigkeiten: $\operatorname{div} \underline{v} \approx 0$ (in guter Näherg. inkompressibel!)

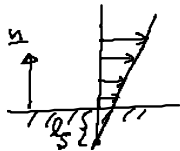
• Randbedingung:

(i) haftend:

$$\underline{v}|_{\text{Rand}} = 0 \quad (3.63)$$

+ glatte, „homogene“ Oberfläche

(ii) mit „Slip“-länge l_s :



Normalgeschw.: $v_n = 0$

Tangentialgeschw.: $(v_t - l_s \underline{n} \cdot \nabla v_t)|_{\text{Rand}} = 0$

(3.64)

Realisierung: strukturierte Oberfläche (auf Nanometerskala)

- mit Polymeren beschichtet

Nadeln



[Choi, Kim PRL 36, 06601 (2006)]

Silikonnadeln auf Silikonplatte

- chemisch strukturiert \rightarrow Master



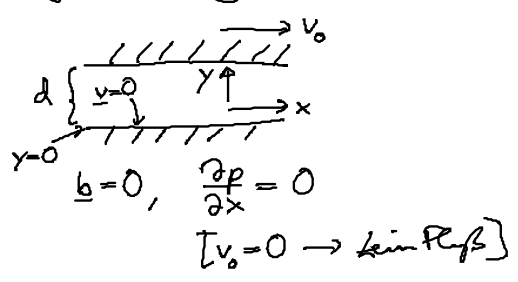
hydrophob hydrophil

- Rauigkeit

→ $l_s = \dots 100 \text{ nm} \dots 50 \mu\text{m}$

wichtig für: Mikro/Nanofluidik
Biologie
poröse Medien

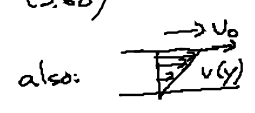
• einfache Strömungsmechanik: Couette-Strömung = Strömung, erzeugt durch Bewegung



Annahme: $\underline{v} = v(y) \underline{e}_x$

→ $\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = 0 \ \& \ \text{div } \underline{v} = 0 \xrightarrow{(3.62)} \eta \nabla^2 \underline{v} = 0$

→ $\frac{\partial^2}{\partial y^2} v(y) = 0 \rightarrow \boxed{v(y) = v_0 \frac{y}{d}} \quad (3.65)$



Spannungstensor: $\underline{T} = 2\eta \underline{A}, \ A_{ij} = \frac{1}{2} (v_{,ij} + v_{,ji})$

→ Kraft pro Flächeneinheit: $\boxed{T_{xy} = \eta \frac{\partial v(y)}{\partial y} = \eta \frac{v_0}{d}} \quad (3.66)$

Kraft durch Platten wandern ... Meßvorschrift für Serrviskosimetrie η !

• Poiseuille-Strömung: s. Übung

• Viskosität: η, η' Einheit: $\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} \cdot \frac{\text{Länge}}{\text{Geschw.}} = \text{Pa} \cdot \text{s} = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$
 $= 10 \frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{s}} = 10 \text{ P (oise)}$ (Rheometer)

Werte für η : s. Folie

3.11 Die Reynoldszahl

- NS-Gln: keine inhärente Längenskala (außer Molekülgröße)
 - NS-Gln. sind skaleninvariant (gültig auf Länge $\geq 10\text{nm}$)
 - \triangleq Physik ist auf allen Skalen die gleiche
 - Ähnlichkeitsprinzip: Auto \longleftrightarrow Windkanal



- NS-Gln. mit $\text{div } \underline{v} = 0$, $\underline{b} = 0$

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v} \quad (3.67)$$

mit $a \dots$ charakt. Länge [Kanalbreite, Teilchenradius]
 $v_0 \dots$ " Geschw. [Fließgeschw., Driftgeschw.]
 $\Delta p \dots$ " Druckabfall

→ Skalierung auf einheitliche Größen:

$$\tilde{x} = \frac{x}{a}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_0}, \quad \tilde{t} = t/a/v_0, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\Delta p}$$

o.B. →
$$\text{Re} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{v} \right) = -\frac{1}{2} \text{Eu} \text{Re} \tilde{\nabla} \tilde{p} + \tilde{\nabla}^2 \tilde{v} \quad (3.68)$$

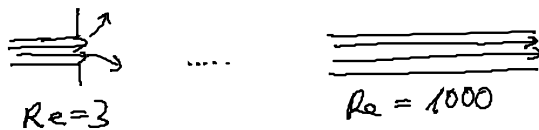
$$\begin{aligned} \text{Reynoldszahl: } \text{Re} &= \frac{\rho a v_0}{\eta} = \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{viskose Kraft}} = \frac{\rho v_0^2 a}{\eta v_0/a} \\ \text{Eulierzahl: } \text{Eu} &= \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} = \frac{\text{Druckkräfte}}{\text{Trägheitskräfte}} \end{aligned} \quad (3.69)$$

→ Ähnlichkeitsprinzip:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Systeme mit gleicher Re \& Eu verhalten} \\ \text{sieh gleich.} \end{array} \right\} (3.70)$$

- Einteilung:
 - $Re < 1$: laminar, schleichtender Fluss
 Reibung dominiert ($\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} < \eta \nabla^2 \mathbf{v}$)
 vernachlässige $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ auf Zeit $\frac{a}{v_0}$ für $Re \ll 1$!
 Bsp: - Strömung um Kugel
 - Tropfen geschicht
 - $Re > 1$: Turbulenz, Trägheit dominiert
 Bsp: Kaffeetasse

- Übergang zu Turbulenz: real, Geometrieabhängig



- Bsp: Schwimmende Organismen
 30m Wal, $v_0 = 10 \frac{m}{s} \rightarrow Re \approx 3 \cdot 10^8$
 1µm Bakterien, $v_0 = 30 \frac{\mu m}{s} \rightarrow Re \approx 3 \cdot 10^{-5}$
 → s. Folie

- kritische viskose Kraft:

$$\frac{\eta \left[\frac{kg}{m \cdot s} \right]}{\rho \left[\frac{kg}{m^3} \right]} \left[F_{krit} = \frac{\eta^2}{\rho} \right] (371) \Rightarrow \frac{\text{äußere Kraft } F}{F_{krit}} = \begin{cases} \ll 1, \text{ laminar} \\ (Re \ll 1) \\ \gg 1, \text{ Turbulenz} \\ (Re \gg 1) \end{cases}$$

konsistent mit Re ?

$$\frac{\text{Reibungskraft} \sim \eta a v_0}{\eta^2 / \rho} = Re \gtrsim \frac{\text{Trägheitskraft} \sim \rho v_0^2 a^2}{\eta^2 / \rho} = Re^2 \quad \text{für } Re \lesssim 1$$

Bsp: Tabelle s. Folie

H_2O : $F < F_{krit} \approx 1 \mu N \rightarrow$ sel. zähe Flüssigkeit in
 Mikro-/Nanowelt

insbesondere: Zelle: $F = 1 pN$
 → dominiert durch Reibung