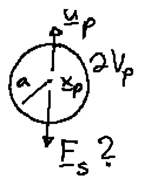
4.4 Stokes-Reibung

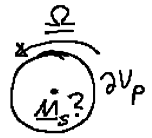
• 2 Standardsituationen:

(i) linear bewegte Kugel



Reibungskraft $\underline{F}_s$?

(ii) rotierende Kugel



Reibungsdrehmoment $\underline{M}_s$?

Berechne: $\underline{v}(\underline{x}), p(\underline{x}) \longrightarrow \underline{\underline{T}} \longrightarrow \underline{F}_s, \underline{M}_s$

a) Translation

• Randbedingungen:

$$\left.\begin{array}{ll}(i) & \underline{v}(\underline{x}) \longrightarrow 0, \quad r = |\underline{x}| \longrightarrow \infty \\ (ii) & \underline{v}(\underline{x}) = \underline{u}_p \quad , \quad \underline{x} \in \partial V_p \end{array}\right\} \quad (4.17)$$

• 1. Weg: mit $\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')$

Ansatz: Oberflächenkraftdichte von Kugel auf Flüssigkeit

$$\varrho\, \underline{b}(\underline{x}')\Big|_{\underline{x}' \in \partial V_p} = \frac{c}{4\pi a^2}\, \underline{u}_p \quad (4.18)$$

... konstant auf ∂V_p!!

$$\longrightarrow \underline{v}(\underline{x}) \overset{(4.6)}{=} \frac{c}{4\pi a^2} \oint_{\partial V_p} \underbrace{\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')}_{\substack{\text{Lsg. der Stokes Gln.} \\ \text{für } \underline{x}-\underline{x}' \neq 0}} \underline{u}_p \, df' \quad (4.19)$$

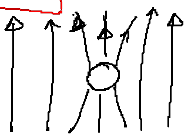
mit $\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}') = \underline{\underline{O}}(\underline{x}-(\underline{x}_p + \Delta \underline{x}_p))$

& Hilfssatz (4.5) $\left[\frac{1}{4\pi a^2} \oint_{\partial V_p} \underline{v}(\underline{x})\, df = \left(1 + \frac{1}{6} a^2 \nabla_p^2\right) \underline{v}(\underline{x}_p)\right]$

$$\longrightarrow \underline{v}(\underline{x}) = c\left(1 + \frac{1}{6} a^2 \nabla_p^2\right) \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}_p)\, \underline{u}_p$$

RB (4.17) (i) $\xrightarrow[\underline{v}(\underline{x})|_{\partial V_p} = \underline{u}_p]{\text{o.B.}}$ $c = 6\pi\eta a$ (4.20)

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \underline{v}(\underline{x}) &= \underline{\underline{S}}(\underline{x}-\underline{x}_p)\,\underline{u}_p \\ \text{mit } \underline{\underline{S}}(\underline{x}) &= 6\pi\eta a \left(1 + \tfrac{1}{6} a^2 \nabla_p^2\right) \underline{\underline{O}}(\underline{x}) \\ &\overset{\text{o.B.}}{=} \frac{3}{4}\frac{a}{r}\left(\underline{\underline{1}} + \frac{\underline{x}\otimes\underline{x}}{r^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(\underline{\underline{1}} - 3\frac{\underline{x}\otimes\underline{x}}{r^2}\right) \end{aligned}} \quad (4.21)$$



NB: für $r \gg a$: $\underline{v}(\underline{x}) \approx \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}_p)\,\underbrace{6\pi\eta a\,\underline{u}_p}_{\underline{F} = -\underline{F}_s\,!}$ s.u.

... Stokeslet

2. Weg: löse (4.1) direkt $\longrightarrow$ $\underline{v}(\underline{x})$, $p(\underline{x})$ [s. Übungen]

- Stokessche Reibungskraft:

1. Weg: $\underset{\substack{\text{actio =}\\ \text{reactio}}}{\underline{F}_s} = -\int_{\partial V_p} \rho^b(\underline{x})\, df \overset{(4.18)}{=} -c\,\underline{u}_p \underbrace{\int_{\partial V_p} \frac{df}{4\pi a^2}}_{=1}$

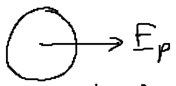
$$\longrightarrow \boxed{\underline{F}_s = -6\pi\eta a\,\underline{u}_p} \quad (4.22)$$

... gültig für $t \gg \tau_H = \dfrac{a^2}{6\eta/\rho}$!

2. Weg: $\underline{v}(\underline{x}), p(\underline{x}) \longrightarrow \underline{\underline{T}} = -p\,\underline{\underline{1}} + 2\eta\,\underline{\underline{A}}$

$\longrightarrow \underline{F}_s = \int_{\partial V_p} \underline{\underline{T}}\, d\underline{f}$

- <u>Brownsche Zeitskala</u> τ_B:



Bewgl.: $m\frac{d\underline{u}_p}{dt} = \underline{F}_p + \underline{F}_s \longrightarrow m\dot{\underline{u}}_p + \gamma\underline{u}_p = \underline{F}_p$ (4.23) $\quad \gamma = 6\pi\eta a$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \boxed{\begin{aligned} \underline{u}_p &= \frac{\underline{F}_p}{\gamma}\left(1 - e^{-t/\tau_m}\right) \\ \text{mit } \tau_m &= \frac{m}{\gamma} = \frac{2}{9} a^2 \frac{\rho_p}{\eta} \end{aligned}}$$

Impulsrelaxationszeit

$m = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_p$

$\gamma = 6\pi\eta a$

vgl. $\tau_H = \frac{1}{6} a^2 \frac{\rho}{\eta}$

Bsp: $\rho_p = 1000\,\frac{kg}{m^3}$, $a \approx 1\,\mu m$, $\eta = 10^{-3}\,\frac{kg}{m s}$ $\longrightarrow$ $\tau_m \approx \frac{2}{9}\cdot 10^{-6}\,s$

$\longrightarrow$ Impulsrelaxation vernachlässigbar auf Zeitskala

$$\boxed{\tau_B \gg \tau_H \geq \tau_m}$$

damit gilt: $\boxed{\underline{u}_p(t) = \frac{1}{\zeta}\,\underline{F}_p(t)}$ (4.26)

NB: (4.23) nicht konsistent, weil auf Zeiten $\tau_m \approx \tau_H$ keine stationäre Strömung existiert $\longrightarrow$ $\zeta \underline{u}_p$ nicht gültig

$\longrightarrow$ besser: $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} \underbrace{\zeta(t-t')}_{\text{Gedächtnisfunktion}} \underline{u}_p(t')\,dt' \overset{\text{Kausalität}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\zeta(t-t')}_{=0,\ t'>t} \underline{u}_p(t')\,dt'$

$\xrightarrow{FT}$ $\underbrace{\zeta(\omega)}_{\text{frequenzabh. Reibungskoeffizient}} \underline{u}_p(\omega) = \underline{F}_p(\omega)$

$\underline{u}_p(t) = u_p(\omega)\, e^{i\omega t}$

$\longrightarrow \underline{F}_p(\omega)$

b) Rotation

- Randbed.: (i) $\underline{v}(\underline{x}) \longrightarrow 0$, $r \to \infty$

  (ii) $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{\Omega} \times (\underline{x} - \underline{x}_p)$, $\underline{x} \in \partial V_p$

- 1. Weg: $\rho\, \underline{b}(\underline{x})\big|_{\partial V_p} = \frac{c}{4\pi a^2}\, \underline{\Omega} \times (\underline{x} - \underline{x}_p)$

  ⋮ Integral: $\underline{v}(\underline{x}) = \frac{c}{4\pi a^2} \oint_{\partial V} \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')\,[\underline{\Omega} \times (\underline{x}' - \underline{x}_p)]$

RB(ii) $\longrightarrow$ $c = 12\pi \eta a$

$\longrightarrow$ $\boxed{\underline{v}(\underline{x}) = \left(\frac{a}{r}\right)^3 \underline{\Omega} \times (\underline{x} - \underline{x}_p) \sim \frac{1}{r^2}, \quad r = |\underline{x} - \underline{x}_p|}$ (4.27)

2. Weg: s. Übungen

• Stokessche Drehmoment:

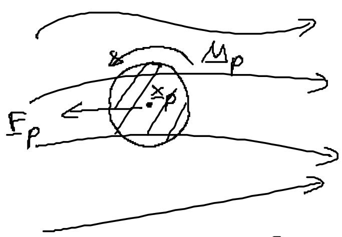
$$\underline{M}_s = -\int_{\partial V_p} \left[(\underline{x}-\underline{x}_p)\times \varrho\, \underline{b}(\underline{x})\right] df$$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \quad \boxed{\underline{M}_s = -8\pi\eta a^3\, \underline{\Omega}} \qquad (4.28)$$

4.5 Faxén-Theorem

• tiefere Einsicht, nur für kugelförmige Teilchen

• Problemstellung:



$\underline{v}_0(\underline{x})$ ... Lsg. der Stokes-Gln. ohne Teilchen

$\underline{u}_p, \underline{\Omega}_p$?

• Geschw. der Teilchenoberfläche: $\underline{x} \in \partial V_p$

$$\underbrace{\underline{u}_p + \underline{\Omega}_p \times (\underline{x}-\underline{x}_p)}_{(i)} = \underbrace{\underbrace{\underline{v}_0(\underline{x})}_{(iv)} + \underbrace{\int df'\, \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')}_{(ii),\,(iii)}\, \underbrace{\varrho\, \underline{b}(\underline{x}')}_{\substack{\text{Oberflächenkraftdichte} \\ \text{von Teilchen auf Flüssig-} \\ \text{keit}}}}_{\substack{\text{o.B.d.A., } \varrho \underline{b}(\underline{x}') \text{ stellt sich so ein,} \\ \text{daß (4.29) gilt}}} \qquad (4.29)$$

Betrachte: $\frac{1}{4\pi a^2}\int_{\partial V_p} (4.29)\, df$

$$\longrightarrow \text{(i)} \int_{\partial V_p} (\underline{x} - \underline{x}_p)\, df = 0 \,! \qquad (4.30)$$

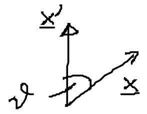
$$\text{(ii)} \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\partial V_p} df\, \underline{\underline{O}}(\underline{x} - \underline{x}') \quad , \quad \underline{x}, \underline{x}' \in \partial V_p$$

$$\underset{\text{Isotropie}}{\overset{!}{=}} c\, \underline{\underline{1}} \qquad (4.31)$$

(keine Richtung bei Mittelung ausgezeichnet)

$$\xrightarrow[(4.15)]{Sp\,(4.31)} 3c = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{4}{8\pi\eta} \int_{\partial V_p} \frac{df}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \underset{\underline{x}' = z\text{-Achse}}{\overset{\text{Kugel}}{\underset{\text{Koord.}}{=}}} \frac{1}{2\pi\eta a}$$

$$\underline{\underline{O}}(\underline{x}) = \frac{1}{8\pi\eta r}\left(\underline{\underline{1}} + \frac{\underline{x} \circ \underline{x}}{r^2}\right)$$



$$\longrightarrow \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\partial V_p} df\, \underline{\underline{O}}(\underline{x} - \underline{x}') = c\, \underline{\underline{1}} = \frac{1}{6\pi\eta a} \underline{\underline{1}} \qquad (4.32)$$

$$\text{(iii)} \frac{1}{6\pi\eta a} \int df' \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{b}(\underline{x}') = \frac{1}{6\pi\eta a} \underline{F}_p \qquad (4.33)$$

[Gesamtkraft auf Teilchen = Gesamtkraft auf Flüssigkeit]

$$\text{(iv)} \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\partial V_p} \underline{v}_0(\underline{x})\, df \underset{(4.5)}{=} \left(1 + \frac{1}{6} a^2 \nabla_p^2\right) \underline{v}_0(\underline{x}_p) \qquad (4.34)$$

$$\xrightarrow{\text{(i)–(iv) in (4.29)}} \boxed{\underline{u}_p = \frac{1}{6\pi\eta a} \underline{F}_p + \left(1 + \frac{1}{6} a^2 \nabla_p^2\right) \underline{v}_0(\underline{x}_p)} \qquad (4.35)$$

… Faxén-Theorem für Translation

(i) $\underline{v}_0(\underline{x}) = 0 \longrightarrow$ Stokes (4.22)

$$\underline{F}_p = -\underline{F}_S$$

(ii) kräftefreies Teilchen:

$$\underline{F}_p = 0 \longrightarrow \underline{u}_p = \underline{v}_0(\underline{x}_p) + \frac{1}{6} a^2 \nabla_p^2 \underline{v}_0(\underline{x}_p) \;!!!$$

(iii) wichtig für Störungstheorie für HW [s. Kap. 6]

- Faxén-Theorem für Rotation: $\left[\int (\underline{x} - \underline{x}_p) \times (4.29)\, df \longrightarrow \ldots\right]$

$$\boxed{\underline{\Omega}_p = \frac{1}{8\pi\eta a^3} \underline{M}_p + \underbrace{\frac{1}{2} \nabla_p \times \underline{v}_0(\underline{x}_p)}_{\text{Vortex in Strömung!}}} \qquad (4.36)$$

(vgl. Gl. (3.9))