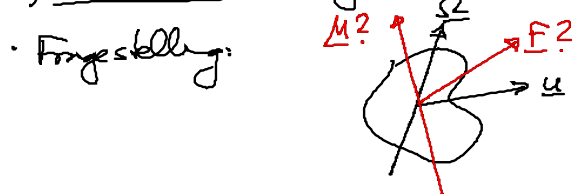


4.6 Hydrodynamische Reibung von Teilchen

in Kap. 4.4: Stokes-Reibung von Kugeln

a) Teilchen beliebiger Gestalt:



Geg: $u, \underline{\Omega}$ → Ges: äußere Kraft F , Drehmoment M

• Stokessche Gln. linear in u → lineare Beziehung:

$$\begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\beta} & \underline{C} \\ \underline{C}^t & \underline{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \underline{\Omega} \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Bem: (i) $\underline{\beta}, \underline{\beta}^t$ } Reibungstensoren für $\begin{cases} \text{Translation} \\ \text{Rotation} \end{cases}$

(ii) \underline{C} ... Koppeltensor für Translation und Rotation

(iii) Es gilt: $\underline{\beta}^t = \underline{\beta}, \underline{\beta} = \underline{\beta}^t, \underline{C}$ und \underline{C}^t (4.38)

Beweis: im Prinzip: Onsager'sche Reziprozitätsrelation (s. Kap. 3.8b)

Stokes Gln.: Spazielle Reziprozitätsbeziehung

(iv) $\underline{\beta}, \underline{\beta}^t, \underline{C}$ müssen Symmetrie des Teilchens widerspiegeln

(v) Bsp: Kugel (vgl. Kap. 4.4)

$$\underline{\beta} = 6\pi\eta a \mathbb{1}, \quad \underline{\beta} = 8\pi\eta a^3 \mathbb{1}, \quad \underline{C} = 0$$

Beweis: $\underline{C} = 0$

(1) \underline{C} ... Pseudotensor 2. Stufe

$\hat{=} \underline{C} \rightarrow -\underline{C}$ unter Punktspiegelung am Ursprung ($\underline{R} = -\mathbb{1}$)

Grnd: polare Vektoren $F, u \xrightarrow{\underline{R} = -\mathbb{1}} -F, -u$

Pseudovektoren $\underline{M}, \underline{\Omega}$ $\xrightarrow{K=-1}$ $\underline{M}, \underline{\Omega}$ } $\rightarrow \underline{C} = \underline{U}$

axiale

(2) Symmetriegruppe der Kugel: $O(3)$
 $(\rightarrow \underline{C} \sim \underline{1}$ und $\underline{C} \xrightarrow{\underline{p}} -\underline{C} \xrightarrow{R=-1} \underline{C} = 0)$

• dissipierte Energie pro Zeiteinheit:

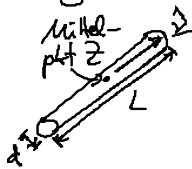
$$\dot{W} = \underline{F} \cdot \underline{u} + \underline{M} \cdot \underline{\Omega} \quad (4.40)$$

$$\stackrel{(4.1)}{=} \underline{u} \cdot \underline{\beta} \underline{u} + \underline{\Omega} \cdot \underline{\beta} \underline{\Omega} + 2 \underline{u} \cdot \underline{C} \underline{\Omega}$$

• $\underline{Q}, \underline{M}$ relativ zu Pkt. gewählt \rightarrow

für ein Reaktionszentrum, so daß $\underline{C} = \underline{C}^T$ (4.41)

b) langer, dünner Stab



$\frac{L}{d}$... Aspektverhältnis

• Koppeltensor (für $z = \text{Reaktionszentrum}$)

$$\underline{C} = 0 \rightarrow \begin{cases} \underline{F} = \underline{\beta} \underline{u} \\ \underline{M} = \underline{\beta} \underline{\Omega} \end{cases} \quad (4.42)$$

• Translation:

$$\underline{\beta} = \beta_{\parallel} \underline{\hat{v}} \otimes \underline{\hat{v}} + \beta_{\perp} (\underline{1} - \underline{\hat{v}} \otimes \underline{\hat{v}}) \quad (4.43)$$

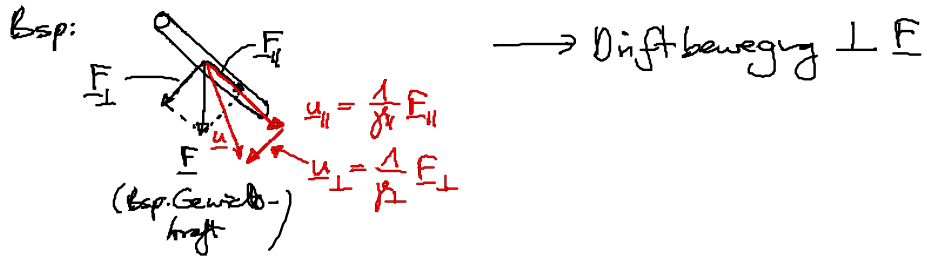
mit $\beta_{\perp} \approx \frac{4\pi\eta}{\ln(L/d)} L \approx 2\beta_{\parallel}$, $L \gg d$

Bem: (i) Rotationssymmetrie um $\underline{\hat{v}} \rightarrow \underline{\beta} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \beta_{\perp} & & 0 \\ & \beta_{\perp} & \\ 0 & & \beta_{\parallel} \end{pmatrix}$
 [formal: C_{∞} -Achse $\parallel \underline{\hat{v}}$]
 Matrixform

\rightarrow Reibungskonstanten:

$$\left. \begin{aligned} \underline{u} \parallel \underline{\hat{v}} &\rightarrow \underline{F} = \beta_{\parallel} \underline{u} \\ \underline{u} \perp \underline{\hat{v}} &\rightarrow \underline{F} = \beta_{\perp} \underline{u} \end{aligned} \right\} (4.44)$$

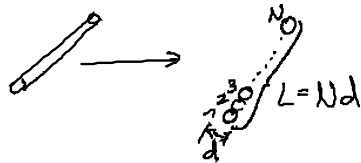
(ii) i.a. $\underline{F} \perp \underline{u}$



(ii) Randeffecte des Stabs $\rightarrow \beta_{\perp} \neq 2\beta_{\parallel}$

Bsp: $\beta_{\perp} = \frac{3}{2} \beta_{\parallel}$ für $\frac{L}{d} \approx 20$

(iv) Beweis von (4.43): s. Übung



Jede Kugel \rightarrow Stokeslet $v_j(x) = \frac{1}{8\pi\eta d} \frac{F}{|x-x_j|}$

Kraft verteilt sich \rightarrow hängt auf alle Kugel

$$\rightarrow u = u(x) = \frac{1}{3\pi\eta d} \frac{F}{N} + \sum_{j \neq i} v_j(x_j)$$

durch Kraft auf Kugel i
von anderen Kugel

• Rotation: (o.B.)

$$\underline{M} = \beta \underline{\Omega} \perp \hat{y} \quad (4.45)$$

mit $\beta = \frac{\pi\eta L^3}{3 \ln(L/d)}$

c) Helix = Schraubenlinie:

• Geometrie: \rightarrow Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{p}$

Helix-Achse

Radius R

Rechtsschraube } $\xrightarrow{\text{spiegeln}}$ } Linksschraube
 rechtshändige Helix } $\xrightarrow{\text{spiegeln}}$ } linkshändige Helix

chirales Objekt

Ortsvektor $x = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ p \frac{\varphi}{2\pi} \end{pmatrix}$, $\hat{y} \parallel e_z$, φ ... Azimutalwinkel

• Beschränkung: $F, M, u, \Omega \parallel \hat{z}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & C \\ C & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \Omega \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{mit } \beta &= \frac{2\pi}{\sqrt{R^2+k^2}} \left(\int_{\parallel} k^{-2} + \int_{\perp} R^2 \right) \\ \beta &= \frac{2\pi}{\sqrt{\cdot}} R^2 \left(\int_{\parallel} R^2 + \int_{\perp} k^{-2} \right) \\ C &= \frac{2\pi}{\sqrt{\cdot}} k^{-1} R^2 \left(\int_{\parallel} - \int_{\perp} \right) \end{aligned} \right\} (4.47)$$

$\int_{\parallel}, \int_{\perp} \dots$ Reibungs Koeffizienten pro Längeneinheit
 \parallel, \perp Helix segment
 $\int_{\perp} \approx 2 \int_{\parallel}$ [s. Gl. (4.43)]

Beweis: s. Übung ??

Betrachte: 1. $\sum \uparrow u$ Bestimme F, M durch Integration von $\underline{f} = [\int_{\parallel} t \hat{t} + \int_{\perp} (1-t) \hat{v}]$
 2. $\sum \uparrow \Omega$ entlang Schraubenlinie mit Tangentialvektor \hat{t}

• Translations-Rotations-Kopplung: $C \sim \int_{\parallel} - \int_{\perp} \neq 0!$

also: $\Omega \rightarrow F = C \Omega \dots$ Schubkraft [\rightarrow E. dli]
 $u \rightarrow M = C u \dots$ „Schubmoment“

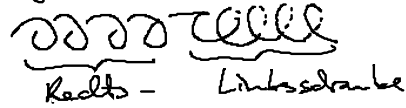
(i) anschaulich: Rotation \rightarrow Reibungs Kraft komp. \parallel Helixachse
 \rightarrow Schubkraft

s. Folie

(ii) abstrakt: Punktspiegelung am Ursprung
 rechtshändige \rightarrow linkshändige Helix
 $u, F \rightarrow -u, -F$
 $\underline{\Omega}, \underline{M} \rightarrow \underline{\Omega}, \underline{M}$ } $C \rightarrow -C$
 also $\begin{pmatrix} -F \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -C \\ -C & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u \\ \Omega \end{pmatrix}$

$\Rightarrow C \dots$ Pseudoskalar: $C \approx \pm 1$ für Rechts-/Links-
 schraube eines dualen
 Objekts

(ii) nicht dualer Objekt:



Reibungsmatrix: $\begin{pmatrix} \gamma & C \\ C & \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & -C \\ -C & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\gamma & 0 \\ 0 & 2\beta \end{pmatrix} \quad (4.48)$

• unvollständige Helix: [Höhe $\neq n\rho$, $n \in \mathbb{N}$]

$\underline{\Omega}, \underline{u} \parallel \underline{\hat{z}} \longrightarrow \underline{F} \neq \underline{\hat{z}} \dots$ Driftbewegung