

Kapitel 6

Dynamische Systeme

6.1 Definition

Ein dynamisches System wird durch einen Satz von Variablen $a_1(t), a_2(t), \dots, a_N(t)$ mit einer Dynamik

$$\dot{a}_i = f_i(a_1, a_2, \dots, a_N, t, \mu)$$

beschrieben. Der *Kontrollparameter* μ hat keine eigene Dynamik sondern beschreibt Änderungen des dynamischen Systems durch äußere Einflüsse (z.B. Temperatur, angelegte Felder, etc.) Im folgenden schreiben wir \mathbf{a} für a_1, a_2, \dots, a_N .

Beispiele:

- Hamilton'sche Dynamik $\mathbf{a} = (p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f)$. f_i ergibt sich aus den partiellen Ableitungen der Hamiltonfunktion.
- Euler'sche Gleichungen für die Komponenten $\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)$ der Winkelgeschwindigkeit im Hauptachsensystem des starren Körpers. Ohne Drehmoment gilt:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \frac{J_2 - J_3}{J_1} \omega_2 \omega_3 \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{J_3 - J_1}{J_2} \omega_3 \omega_1 \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{J_1 - J_2}{J_3} \omega_1 \omega_2\end{aligned}$$

- Harmonischer Oszillator mit Reibungskraft $F_{\text{diss}} = -\gamma m \dot{x}$. Wähle $\mathbf{a} = (x, v)$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\gamma v - \omega_0^2 x \end{pmatrix}$$

Die Dynamik $\mathbf{f}(\mathbf{a}, t, \mu)$ beschreibt in Analogie zur Hydrodynamik den Fluss des Systems im Raum der Variablen. Die Funktion $\mathbf{a}(t)$ bezeichnet man als *Trajektorie*. Häufig betrachtet man *autonome Systeme* bei denen der Fluss $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mu)$ nicht von der Zeit abhängt.

6.2 Fixpunkte und Stabilität

Im folgenden beschränken wir uns auf autonome Systeme. Als *Fixpunkt* bezeichnet man einen Punkt \mathbf{a}^0 bei dem alle zeitlichen Ableitungen verschwinden, d.h. $\mathbf{f}(\mathbf{a}^0, \mu)$. Nun wollen wir das Verhalten für kleine Abweichungen $\delta\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}^0$ untersuchen. Wir finden

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{a}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{a}^0 + \delta\mathbf{a}(t), \mu) = \mathbf{f}(\mathbf{a}^0, \mu) + \sum_i \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial a_i} \delta a_i(t) = \underline{\underline{J}}\delta\mathbf{a}(t) \quad (6.1)$$

mit der Jakobimatrix

$$J_{ij} = \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, \mu)}{\partial a_j} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}^0} \quad \text{für } i, j = 1, 2, \dots, N$$

Die Jakobimatrix hat nun Eigenwerte λ_i und zugehörige Eigenvektoren \mathbf{u}_i . Dabei gilt für Auslenkungen der Form $\delta\mathbf{a}(t) = \mathbf{u}g(t)$ in Richtung der Eigenvektoren für:

reelle λ :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}g(t) = \underline{\underline{J}}\mathbf{u}g(t) = \lambda\mathbf{u}g(t) \quad \Rightarrow \quad g(t) = e^{\lambda t}g(0)$$

Wir haben für $\lambda > 0$ eine *abstoßende Richtung* und für $\lambda < 0$ eine *anziehende Richtung*

komplexes $\tilde{\lambda}$: Da die Jakobimatrix reell ist, treten paarweise komplex konjugierte Eigenwerte $\tilde{\lambda}_{\pm} = \lambda \pm i\omega$ und Eigenvektoren $\tilde{\mathbf{u}}_{\pm} = \mathbf{u} \mp i\mathbf{v}$ auf, wobei die reellen Vektoren \mathbf{u}, \mathbf{v} linear unabhängig sind. Im Komplexen hat die Differentialgleichung (6.1) nun die Lösungen

$$\delta\tilde{\mathbf{a}}_{\pm}(t) = \tilde{\mathbf{u}}_{\pm}\tilde{g}(0)e^{\tilde{\lambda}_{\pm}t}.$$

Da die Differentialgleichung (6.1) reell und linear ist, sind auch der Real- und Imaginärteil von $\delta\tilde{\mathbf{a}}(t)$ Lösungen. Wir erhalten mit $\tilde{g}(0) = g_0e^{i\varphi}$

$$\delta\mathbf{a}(t) = \text{Re}\{\delta\tilde{\mathbf{a}}_+(t)\} = e^{\lambda t} [\mathbf{u} \cos(\omega t + \varphi) + \mathbf{v} \sin(\omega t + \varphi)]$$

(der Realteil von $\delta\tilde{\mathbf{a}}_-(t)$ sowie die Imaginärteile liefern keine weiteren Lösungen.) Damit spiralisiert $\mathbf{a}(t)$ um den Fixpunkt. Für $\text{Re}\{\tilde{\lambda}\} > 0$ hat man einen *abstoßenden Fokus* und für $\text{Re}\{\tilde{\lambda}\} < 0$ einen *anziehenden Fokus*.

Bilden die Eigenvektoren ein vollständiges Basis-System¹, so kann man eine beliebige anfängliche Abweichung $\delta\mathbf{a}(0)$ nach den Eigenvektoren entwickeln und erhält somit in allen Richtungen ein exponentielles Verhalten $e^{\lambda_i t}$ in der Zeit. Damit folgt

Sind die Realteile aller Eigenwerte der Jakobimatrix negativ, so klingt jede kleine Abweichung von dem Fixpunkt exponentiell in der Zeit ab und man hat einen *stabilen Fixpunkt*.

¹Da die Jakobimatrix nicht symmetrisch ist, gibt es bei mehrfach entarteten Eigenwerten häufig nur einen Eigenvektor, sodass die Eigenvektoren kein vollständiges System bilden. Diese kann man dann aber mit Hauptvektoren zu einem vollständigen System ergänzen. Dabei zeigen die Hauptvektoren dieselbe exponentielle Zeitabhängigkeit mit dem jeweiligen entarteten Eigenwert als Exponenten. Allerdings haben sie eine zusätzliche polynomiale Zeitabhängigkeit.

6.2.1 Beispiel: Harmonischer Oszillator mit Reibung

Der Fixpunkt ist $\mathbf{a}^0 = (x^0, v^0) = (0, 0)$. Dies ist die Ruhelage des Systems. Die Jakobimatrix lautet:

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix}$$

mit dem charakteristischen Polynom $P(\lambda) = \det(\underline{J} - \lambda) = \lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2$. Aus $P(\lambda) = 0$ erhalten wir die Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

Im überdämpften Fall $\gamma > 2\omega_0$ haben wir zwei anziehende Richtungen und im Schwingfall $\gamma < 2\omega_0$ einen anziehenden Fokus. Der Fixpunkt ist also immer stabil, sofern $\gamma > 0$ ist.

6.2.2 Beispiel: Freier rotierender Körper

Die Euler'schen Gleichungen bilden ein dynamisches System. Für den Fall, dass alle Hauptträgheitsmomente J_i unterschiedlich sind, sind die Fixpunkte dadurch gegeben, dass mindestens zwei Komponenten ω_i verschwinden. Das heißt, die Fixpunkte entsprechen Drehungen um die Hauptträgheitsachsen. Nun wollen wir deren Stabilität untersuchen. O.B.d.A betrachten wir hierzu den Fixpunkt $\mathbf{a}^0 = (\omega_1^0, 0, 0)$ einer Drehung um die erste Achse. Die Jakobimatrix lautet

$$\underline{J} = \frac{\partial}{\partial \omega_j} \begin{pmatrix} \frac{J_2 - J_3}{J_1} \omega_2 \omega_3 \\ \frac{J_3 - J_1}{J_2} \omega_3 \omega_1 \\ \frac{J_1 - J_2}{J_3} \omega_1 \omega_2 \end{pmatrix} \Big|_{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\omega_1^0, 0, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_3 - J_1}{J_2} \omega_1^0 \\ 0 & \frac{J_1 - J_2}{J_3} \omega_1^0 & 0 \end{pmatrix}$$

und wir haben das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda \frac{(J_3 - J_1)(J_1 - J_2)}{J_2 J_3} (\omega_1^0)^2$$

mit den Eigenwerten

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_{2/3} = \pm \omega_1^0 \sqrt{\frac{(J_3 - J_1)(J_1 - J_2)}{J_2 J_3}}$$

Nun liegt der Eigenvektor zu Eigenwert $\lambda_1 = 0$ auf der ersten Hauptachse. Eine solche Störung ist eine Änderung der Rotationsgeschwindigkeit $\omega_1^0 \rightarrow \omega_1^0 + g(0)$ um die erste Achse, die ja zu einem neuen Fixpunkt führt.

Für die Eigenwerte $\lambda_{2/3}$ gilt: Wenn das Argument der Wurzel positiv ist, ist einer der beiden anderen Eigenwerte positiv, der andere negativ, und der Fixpunkt ist instabil. Dies ist genau dann der Fall, wenn $J_3 < J_1 < J_2$ oder $J_3 > J_1 > J_2$ gilt, J_1 also das mittlere Hauptträgheitsmomente ist. Umgekehrt wird das Argument der Wurzel negativ, wenn J_1 das größte oder kleinste Hauptträgheitsmoment ist, und wir haben rein imaginäre Eigenwerte. Dann führt die Rotationsachse im Hauptträgheitssystem eine Drehbewegung um die erste Hauptträgheitsachse durch, die weder exponentiell anwächst noch abklingt. Für $J_2 = J_3$ ist dies gerade die reguläre Präzession aus Abschnitt (4.3.2).

Die Rotation eines starren Körpers um die Hauptträgheitsachse mit dem mittleren Trägheitsmoment ist stets instabil.

6.2.3 Fixpunkte eines Hamilton'schen Systems

Die Jakobimatrix eines Hamilton'schen Systems hat die Form

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} & -\frac{\partial^2 H}{\partial q \partial q} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial p} & \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} \end{pmatrix}$$

Damit gilt

$$\text{Spur}\{\underline{J}\} = \sum_i \left[-\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} \right] = 0$$

Da die Spur einer Matrix die Summe aller Eigenwerte ist, können somit nicht die Realteile aller Eigenwerte negativ sein und es gibt keine stabilen Fixpunkte. Neben instabilen Fixpunkten mit einigen abstoßenden Richtungen / Fokus gibt es nur die Möglichkeit, dass alle Realteile Null sind, und das gestörte System in der Nähe des Fixpunktes bleibt.

Dieser Sachverhalt folgt auch aus dem Liouville'schen Satz: Bei einem stabilen Fixpunkt würden alle Trajektorien zusammenlaufen und sich somit das Phasenraumvolumen verringern.

6.3 Bifurkationen

Nun wollen wir untersuchen, was passiert, wenn der Kontrollparameter μ variiert wird. Dabei gehen wir davon aus, dass die Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mu)$ stetig differenzierbar von μ abhängt. Im Regelfall werden sich dann die Lagen der Fixpunkte \mathbf{a}^0 sowie die Eigenwerte der Jakobimatrix stetig mit μ verändern. Eine *Bifurkation* liegt bei einem kritischen Wert μ_c vor, wenn sich entweder die Anzahl der Fixpunkte oder ihre Stabilität ändert.

Da sich der Fluss im Raum der Variablen nicht global ändern darf, kann man zeigen, dass Bifurkationen nur dann auftreten, wenn der Realteil eines Eigenwertes der Jakobimatrix Null wird. In der Regel wird dies entweder bei einem Eigenvektor mit reellem Eigenwert oder bei einem Paar komplex konjugierter Eigenwerte der Fall sein. Solche Bifurkationen lassen sich leicht klassifizieren, wenn man sich auf den eindimensionalen (bzw. zweidimensionalen bei dem komplexen Eigenwert) Unterraum des zugehörigen Eigenvektors beschränkt. Dann sind unten aufgeführten Bifurkationen möglich. Hierzu geben wir jeweils ein generisches Beispiel an, wobei der Kontrollparameter so gewählt ist, dass die Bifurkation bei $\mu = 0$ stattfindet und für $\mu < 0$ ein stabiler Fixpunkt vorliegt.

Für einen reellen Eigenwert, der Null wird:

Sattel-Knoten-Bifurkation: Ein stabiler und ein instabiler Fixpunkt kollidieren und löschen sich aus, siehe Abb. 6.1(a).

$$\dot{a} = \mu + a^2$$

Transkritische Verzweigung: Ein stabiler und ein instabiler Fixpunkt schneiden sich und wechseln ihre Stabilität, siehe Abb. 6.1(b).

$$\dot{a} = \mu a - a^2$$

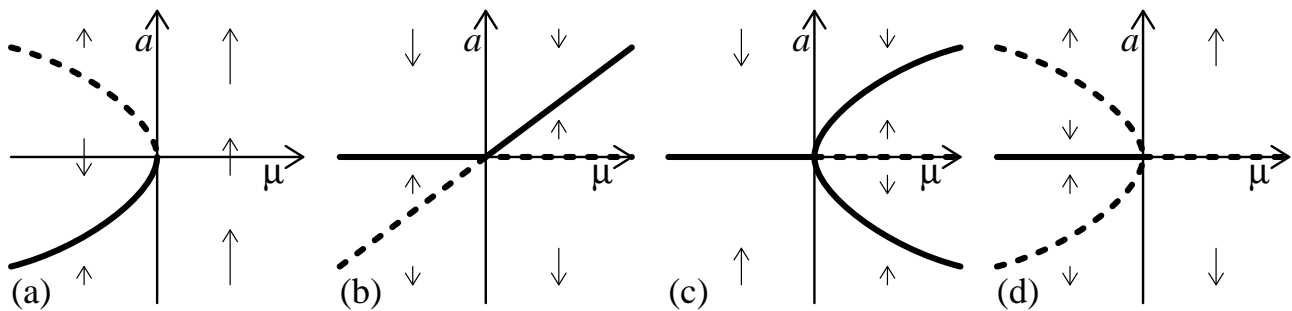


Abbildung 6.1: Skizze der möglichen Bifurkationstypen, wenn ein reeller Eigenwert der Jakobi-matrix zum Fixpunkt a^0 bei $\mu = 0$ Null wird. Die stabilen/instabilen Fixpunkte sind mit einer dicken durchgezogenen/gestrichelten Linie gekennzeichnet. Die Pfeile zeigen die Flussrichtung \dot{a} .

Superkritische Heugabel-Bifurkation (engl. Pitchfork): Aus einem stabilen Fixpunkt entstehen zwei stabile und ein instabiler Fixpunkt, siehe Abb. 6.1(c).

$$\dot{a} = \mu a - a^3$$

Subkritische Heugabel-Bifurkation: Ebenso kann ein stabiler Fixpunkt mit zwei instabilen Fixpunkten zusammenstoßen, wobei ein instabiler Fixpunkt übrig bleibt, siehe Abb. 6.1(d).

$$\dot{a} = \mu a + a^3$$

Für einen komplexen Eigenwert, dessen Realteil Null wird:

superkritische Hopf-Bifurkation: Ein stabiler Fixpunkt wird instabil. Dabei löst sich ein stabiler Grenzzyklus ab. Siehe Abb. 6.2.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - y - (x^2 + y^2)x \\ \dot{y} &= \mu y + x - (x^2 + y^2)y\end{aligned}$$

Mit $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$ wird daraus $\dot{r} = \mu r - r^3$ und $\dot{\varphi} = 1$. Dies entspricht einer Heugabel-Bifurkation in r , wobei sich die beiden neuen stabilen Zustände mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um den instabilen Ast drehen. Dieser Bifurkationstyp ist charakteristisch, wenn ein System anfängt von selbst zu schwingen.

subkritische Hopf-Bifurkation: Ein stabiler Fixpunkt kollidiert mit einem instabilen Grenzzyklus und wird instabil. Dies entspricht der subkritischen Heugabel-Bifurkation.

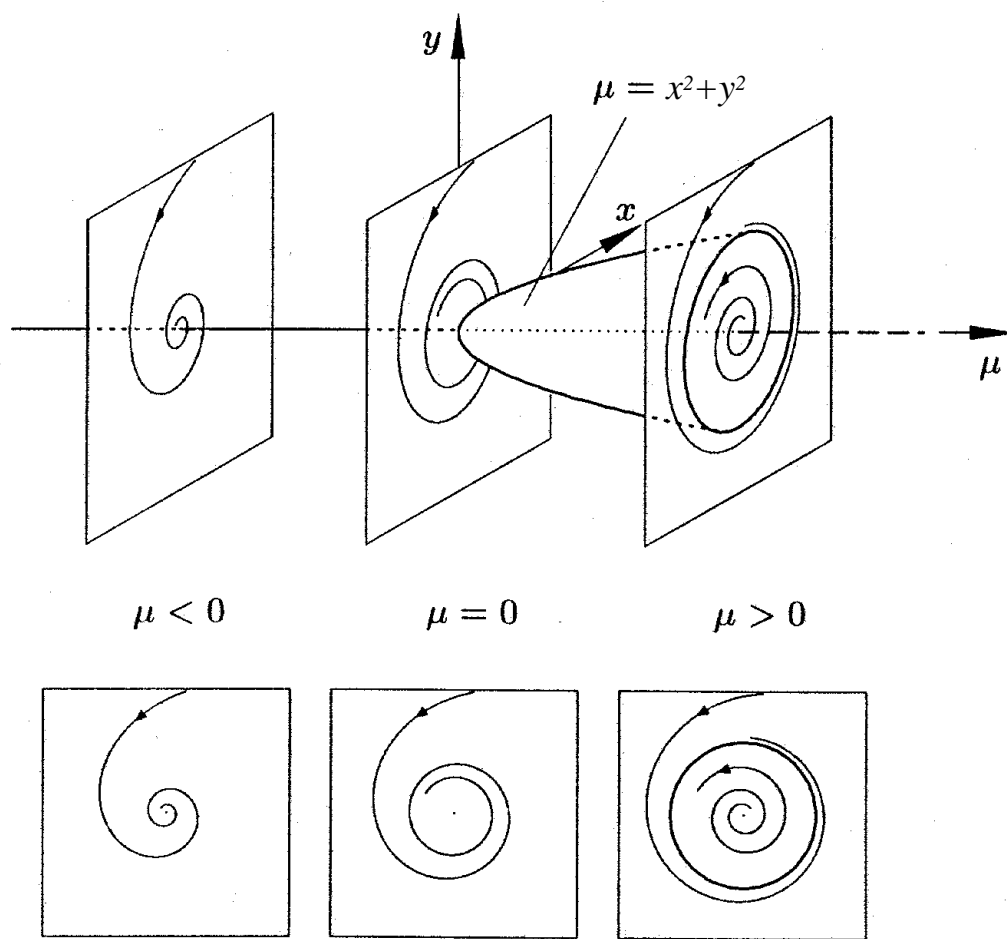


Abbildung 6.2: Skizze einer superkritischen Hopf-Bifurkation