VI. Formale Lösung der Maxwellgleichungen bei Anwesenheit von Quellen

1. Vektor- und skalares Potential, Eichtransformation

- Maxwellgleichungen sind gekoppelte partielle Dgl. 1.Ordnung, die verschiedene Komponente der beteiligten Felder mischen.
- Oftmals ist es günstig, Potentiale einzuführen, die ein kleinere Zahlvon 2.Ordnungs-Gleichung erfüllen:

a) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, da $\nabla \cdot \nabla \times \equiv 0$

b) $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

$\nabla \phi$ hat die Bedeutung einer “Integrationskonstante”

$\mathbf{A}, \phi$: Vektor-, skalares Potential

Vektor und skalares Potential (2)

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{B} &= \quad \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned}\right\}\text{Definition der Felder durch die Potentiale}$$

Die weiteren 2 Maxwellgleichungen werden zur Bestimmung der Gleichungen für die Potentiale verwendet:

einsetzen der Felder $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ und $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

in die Gleichungen $\nabla \cdot \mathbf{E} = +\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\partial_t \mathbf{E}$

Potentialgleichungen:

$$\nabla^2\phi + \partial_t \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \mathbf{A} - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t \phi\right) = -\mu_0 \mathbf{J}$$

Reduktion von 4 Maxwellgl. auf 2 Potentialgl.,

aber: sind immer noch gekoppelt

2. Eichtransformationen

- Potentiale können in einem bestimmten Rahmen verändert ("umgeeicht") werden, ohne die Felder (sind die beobachtbaren Größen) zu ändern, führt oftmals zu vereinfachten Problemen:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} \to \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla\psi \\ \phi \to \phi' &= \phi - \partial_t\psi \end{aligned}\right\}$$ "Eichtransformation" für die Potentiale, ψ-Eichfkt.

- Um zu zeigen, daß $\psi(\mathbf{r}, t)$ beliebig gewählt werden kann, muß gezeigt werden, daß

1) Felder sind invariant:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}', \; \mathbf{B} = \mathbf{B}'$$

d.h. die Physik wird nicht durch eine Eichtransformation geändert.

$$\mathbf{E}' = -\partial_t\mathbf{A}' - \nabla\phi' = -\partial_t\mathbf{A} - \partial_t\nabla\psi - \nabla\phi + \nabla\partial_t\psi = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla\psi}_{=0} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Eichtransformationen (4)

2) Potentialgleichungen sind invariant:

$$\nabla^2\phi' + \nabla^2\partial_t\psi + \partial_t\nabla\cdot\mathbf{A}' - \partial_t\nabla\cdot\nabla\psi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2\phi' + \partial_t\nabla\cdot\mathbf{A}' = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{ist also invariant.}$$

ebenso:

$$\nabla^2\mathbf{A}' - \nabla^2(\nabla\psi) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\mathbf{A}' + \frac{1}{c^2}\partial_t^2\nabla\psi$$
$$-\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}' - \nabla\cdot\nabla\psi + \frac{1}{c^2}\partial_t\phi' + \frac{1}{c^2}\partial_t^2\psi\right) = -\mu_0\mathbf{J}$$

$$\nabla^2\mathbf{A}' - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\mathbf{A}' - \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}' + \frac{1}{c^2}\partial_t\phi'\right) = -\mu_0\mathbf{J}$$

3) Für ein bestimmte Wahl von ψ muß gezeigt werden,
daß die Bestimmungs- gleichung für ψ lösbar ist.

Die Transformation $\mathbf{A} \to \mathbf{A}'$, $\phi \to \phi'$ wird Eichtransformation genannt. Zuge-

hörige Invarianz der Felder heißt Eichinvarianz

2.1 Lorenzeichung

Wählen ψ, so daß $\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0$ gilt für das neue Postential.

Potentialgleichungen in Lorenzeichung

$$\nabla^2 \phi' - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \phi' = -\rho/\epsilon_0$$
$$\nabla^2 \mathbf{A}' - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \mathbf{A}' = -\mu_0 \mathbf{J}$$

ϕ', $\mathbf{A}'$ Gleichungen sind entkoppelt, haben beide Struktur einer Wellengleichung, $\mathbf{A}$, ϕ werden symmetrisch behandelt.

Vorteil der Lorenzeichung:

Symmetrische Formulierung einer Theorie in ϕ und $\mathbf{A}$.

a) relativistische Vierverktoren, Feldtensoren (später)

b) symmetrische Behandlung bei Näherung der Potential mgl.,

da man identische Wellengleichungen behandelt.

Lorenztransformation /Coulombtransformation (6)

Bestimmungsgleichung für ψ folgt aus Eichtransformation:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \nabla \psi, \quad \partial_t \phi' = \partial_t \phi - \partial_t^2 \psi$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \Delta \psi + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \psi = 0$$

ψ kann also immer aus einer Lösung der inhomogenen Wellengleichung bestimmt werden, damit sinnvoll.

2.2 Coulombeichung

wählen Ψ so, daß $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$, $\mathbf{A}'$ ist also quellenfrei. Aus $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$ folgt:

$$\nabla^2 \phi' = -\rho/\epsilon_0, \quad \nabla^2 \mathbf{A}' - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A}' = -\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \partial_t \nabla \phi'$$

Sinnvolle Wahl von ψ ist möglich, denn:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \nabla \psi,$$

denn Ψ ist Lsg. einer Poissongleichung: $\triangle \Psi = -\nabla \cdot \mathbf{A}$.

Coulombeichung (7)

- ϕ': Form einer Poissongleichung : $\phi' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint \frac{\rho(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3r'$

Diese Lösung kann in die Wellengleichung für $\mathbf{A}'$ eingesetzt werden.

- $\mathbf{A}'$:

$$\nabla^2\mathbf{A}' - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\mathbf{A}' = -\mu_0\mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\nabla_r\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint\frac{\partial_t\rho(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3r'$$

$$= -\mu_0\mathbf{J} + \mu_0\frac{1}{4\pi}\nabla_r\iiint \mathrm{d}^3r'\,\frac{-\nabla_{r'}\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$= -\mu_0\iiint \mathrm{d}^3r'\,\mathbf{J}(\mathbf{r}',t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \mu_0\frac{1}{4\pi}\nabla_r\iiint \mathrm{d}^3r'\,\frac{\nabla_{r'}\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

verwenden jetzt $\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \mathrm{d}^3r'\,\underbrace{\left(-\nabla_{r'}^2\mathbf{J}(\mathbf{r}',t) + \nabla_{r'}\nabla_{r'}\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}',t)\right)}_{=\nabla'\times\nabla'\times\mathbf{J}(\mathbf{r}')}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

Coulombtransformation (8)

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\iiint \mathrm{d}^3r'\,\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
&= -\mu_0\mathbf{J}_t, \quad \text{wobei}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{J}_t = \frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\iiint \mathrm{d}^3r'\,\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}
$$

Durch diese Integraltransformation wird ein gewisser Anteil des Gesamtsroms ausprojeziert, dieser Anteil des Gesamtstroms J wird $\mathbf{J}_t$ (transversaler) Strom genannt. Offensichtlich wird das rein transversal Vektorpotential nur durch den transversalen Anteil des Stroms getrieben.

Allgemein gilt das
Helmholzsche Vektortheorem:
Man kann jedes Vektorfeld in seinem longditudinalen und transversalen Anteil aufteilen : $\mathbf{V} = \mathbf{V}_t + \mathbf{V}_l$

vor einer genaueren Diskussion, noch die Vorteile der Coulomeichung:

Coulombeichung (9)

Vorteile der Coulombeichung

Man nutzt unsymmetrische Fomulierung in ϕ und $\mathbf{A}$:

- wenn keine Quelle ρ vorliegt $(\rho = 0) \rightarrow \; \psi = 0$
  $\rightarrow \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ Felder sind allein mit $\mathbf{A}$ bestimmt.
- wenn man makroskopische oder quantenmechanische Mittlung macht, so gilt oft $\langle \mathbf{J} \rangle \approx 0$, $\langle \rho \rangle \neq 0$ in Gleichgewicht
  $\rightarrow$ Hoffnung: $\mathbf{A}$-Effekte weglassen, ϕ-Effekte mitnehmen insbesondere bei einer Quantisierung dieser Felder. z.B. Standardnäherung in der Festkörpertheorie.
- in Quantenelektrodynamik angewandt: spontane Emission von Strahlung wird durch A Effekte hervorgerufen, ϕ erzeugt chemische Bindung, Bsp. H-Atom.

Wichtig: Laufzeiteffekte in den Feldern, werden richtig beschrieben, obwohl ϕ nur eine Poissongl. und keine Wellengleichung erfüllt.

3. Helmholtzsches Vektortheorem

Jedes gutartige (hinreichend stark abfallende) Vektorfeld $\mathbf{V}$ läßt sich eindeutig als Summe eines wirbel- und ein quellenfreien Felds darstellen, bzw. in einen Wirbel und einen Quellenanteil zerlegen:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_l + \mathbf{V}_t$$

$$\mathbf{V}_l = -\nabla\left(\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3 r'\,\frac{\nabla_{r'}\cdot\mathbf{V}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)$$

$$\mathbf{V}_t = \nabla\times\left(\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3 r'\,\frac{\nabla_{r'}\times\mathbf{V}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right), \quad \text{O.B.}$$

Außer Quelle und Wirbele kommen keine weiteren fundamentalen Entstehungsursachen für Felder in Frage
(wichtig für Fomulierung der Maxwellgleichung).
Indizes: l: longditudinaler -,   t: transversaler Anteil

Diese Begriffe werden anhand einer Elementarwelle $\mathbf{V}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ illustriert:

Vektorfeld zu einem festem Zeitpunkt nach Fourierkomponenten zerlegen:
betrachten eine Elementarwelle: $\mathbf{V} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\mathbf{V}_0$:
$\mathbf{k} =$Ausbreitungsrichtung, $\mathbf{V}_0 =$ Vektorrichtung

$$\mathbf{V}_t = -\frac{\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{V}_0)}{k^2}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_0)\mathbf{k} - k^2\mathbf{V}_0}{k^2}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$\uparrow\ V^l$ berechnen

$$= \mathbf{V}_0 - \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_0)\mathbf{k}}{k^2} \quad (= \mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_l)$$

$$\mathbf{V}_l = \frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_0)\mathbf{k}}{k^2}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \mathbf{V}_0 - \left(-\frac{\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{V}_0)}{k^2}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$\mathbf{k}\|\mathbf{V}_0 \ \rightarrow\ \mathbf{V}_0 = \mathbf{V}^l,\ \mathbf{V}^t = 0,$ longditudinaler Wellenanteil

$\mathbf{k}\perp\mathbf{V}_0 \ \rightarrow\ \mathbf{V}_0 = \mathbf{V}^t,\ \mathbf{V}^l = 0,$ transversaler Wellenanteil

Helmholtztheorem (12)

(i) Die Coulombeichung wird oft transversale Eichung genannt,
weil aus $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ folgt: $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k}) = 0$.
Bei der Zerlegung nach ebene Wellen breiten sich die Wellen also $\perp$ zur Schwingungsrichtung aus.
$\mathbf{A}$ ist rein transversal($\equiv \ \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$).

(ii) Analog wird $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ in der Elektrostatik zu $\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}) = 0$ im Fourierraum.
Bei einer Zerlegung nach ebene Wellen ist die k-Richtung $\|$ zur E-Feldrichtung.
$\mathbf{E}$ wird daher longitudinales Feld genannt $\leftrightarrow \ \nabla \times \mathbf{E} = 0$

4. Lösung der inhomogenen Potentialgleichungen

Die Potentialgleichungen sind in Form der Poissongleichung oder der Wellengleichung gegeben.

In Coulombeichung gilt:

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J}_t$$

In Lorenzeichung gilt:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J}$$

4.1 Retardierte Potentiale und Greensche Funktion der Wellengleichung

zu lösende Wgl.:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\psi = -4\pi f(\mathbf{r},t) \quad \text{(gilt für jede Komponente } \psi : \ \{A_i,\ \phi\}\text{)}$$

Def. einer Greenschen Funktion: $G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t,t')$

$$\nabla_r^2 G - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 G = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')$$

Lösung der inhomogenen Potentialgleichungen (14)

a) Wenn G bekannt, so ist $\psi(\mathbf{r},t) = \int \mathrm{d}^3r' \int \mathrm{d}t'\, G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t,t') f(\mathbf{r}',t')$

Beweis:

$$\begin{aligned} \Box\psi &= \int \mathrm{d}^3r' \int \mathrm{d}t' \; \underbrace{\Box_{r,t} G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t,t')}_{=-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')} \; f(\mathbf{r}',t') \\ &= -4\pi f(\mathbf{r},t) \end{aligned}$$

b) keine Richtung, kein spezieller Ort ausgezeichnet,

daher kann G nur von den Differenzen der Orts- und Zeitkoordinaten abhängen:

$\rightarrow G = G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')$

$\left(\nabla_r^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t,t') = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')$

Lösung der inhomogenen Potentialgleichungen (15)

c) Die Lösungen für G sind : $G^{\pm} = \frac{1}{r}\delta(t \mp \frac{r}{c})$

Beweis: o.B.d.A. $\mathbf{r}' \;\rightarrow\; 0$

$$\left(\nabla_r^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) G(\mathbf{r},t) = -4\pi\delta(\mathbf{r})\delta(t)$$

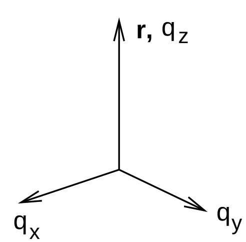
$F.T.$ über $q,$ und $\omega \;\rightarrow\; G(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^3q \int \mathrm{d}\omega\, e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} G(\mathbf{q},\omega)$

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\left(-q^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right) G(\mathbf{q},\omega) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^4}1$$

$$G(\mathbf{q},\omega) = \frac{-4\pi}{-q^2 + \frac{\omega^2}{c^2}}$$

$$G(\mathbf{r},t) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^3q \int \mathrm{d}\omega e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} G(\mathbf{q},\omega)\frac{1}{-q^2 + \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Kugelkoordinaten zur q-Integration:
$\mathbf{r}$ zeigt in q_z Richtung.



Lösung der inhomogenen Potentialgleichungen (16)

$$G(\mathbf{r},t) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega e^{-i\omega t}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\infty}\mathrm{d}q\, q^2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\,\sin\theta\frac{e^{iqr\cos\theta}}{-q^2+\frac{\omega^2}{c^2}}$$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = 2\pi,\ \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\,\sin\theta e^{iqr\cos\theta} = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x e^{iqrx}$$

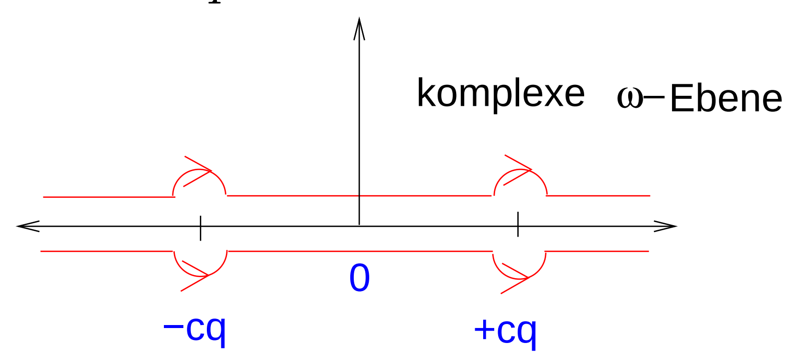
$$(\cos\theta = x,\ \mathrm{d}x = -\sin\theta\mathrm{d}\theta,\ \theta = 0 \to x = 1,\ \theta = \pi \to x = -1)$$

$$= \frac{2}{qr}\sin qr$$

$$= -\frac{4\pi c^2}{(2\pi)^4}\int_0^{\infty}\mathrm{d}q\, q\frac{\sin qr}{r}4\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2-c^2q^2}\mathrm{d}\omega$$

$$= -\frac{c^2}{\pi^2 r}\int_0^{\infty}\mathrm{d}q\, q\sin qr\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2-c^2q^2}$$

$\omega^2 - c^2q^2$ hat Polstellen bei $\omega = \pm cq$
komplexe Integration:(Residuensatz, oberer Integrationsweg)



Lösung der inhomogenen Potentialgleichungen (17)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - c^2 q^2} = \begin{cases} -\frac{2\pi}{cq} \sin cqt & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$G^+(\mathbf{r}, t) = \frac{2c}{\pi r} \int_0^\infty \mathrm{d}q \, \sin qr \, \sin cqt \quad (t > 0) \quad (+: \text{obere Weg})$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}q \, \sin qr \, \sin cqt = \frac{1}{2i} \int_0^\infty \mathrm{d}q \left(e^{iqr} - e^{-iqr} \right) \sin cqt$$

$$= \frac{1}{2i} \left(\int_0^\infty \mathrm{d}q \, e^{iqr} \sin cqt + \underbrace{\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}q \, e^{iqr} \sin cqt}_{q \to -q} \right)$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}q \left(e^{iq(r+ct)} - e^{iq(r-ct)} \right) \frac{1}{2i}$$

$$= -\frac{2\pi}{4} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}q \left(e^{iq(r+ct)} - e^{iq(r-ct)} \right)$$

$$= -\frac{\pi}{2} \left(\delta(r + ct) - \delta(r - ct) \right) = \frac{\pi}{2} \left(\delta(r - ct) - \delta(r + ct) \right) \quad t > 0$$

Lösung der inhomogenen Potentialgleichungen (18)

$$G^+(\mathbf{r},t) = \frac{c}{r}\delta(r-ct) = \frac{\delta(t-\frac{r}{c})}{r} \quad (t>0)$$

analog, wenn der untere Weg geschlossen wird

$$G^-(\mathbf{r},t) = \frac{\delta(t+\frac{r}{c})}{r} \quad (t<0)$$ heißt avancierte Greensche Funktion.

Retardierte und avancierte Greensche Funktion:

$$G^\pm(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') = \frac{\delta(t'-[t\mp\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}])}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

G^+ erfüllt Kausalitätprinzip:
Argument der δ-Fkt. zeigt, daß ein am Ort $\mathbf{r}$ zur Zeit t beobachteter Effekt durch die Quelle am Ort $\mathbf{r}'$ zur Zeit $t' = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$ hervorgerufen wird.
(der Zeitpkt. ist retardiert=verspätet).
Dies ist ein Resultat der Endlichkeit der Lichtgeschw. c,
steht in Kontrast zur Elektrostatik, wo sich die Wechselwirkung sofort, d.h. ohne Laufzeit ausbreitet.

Lösung der inhomogenen Potentialgleichungen (19)

G^-: Avancierte Greensche Fkt.:
Durch das Vorzeichnen (unten in δ-Fkt.) würde Kausalitätsprinzip verletzt. Ursache und Wirkung sind hier zeitlich umgekehrt. (diese Lsg. exisistieren weil Wellengleichung, Maxwellgleichungen invariant gegen Zeitumkehr $t \to -t$) sind)

$\Rightarrow$ Physikalisch sinnvolle Lösung ist G^+.

wichtige Situation: $\psi_{\text{homo}}(\mathbf{r}, t) = 0$

$$\psi^+(\mathbf{r}, t) = \int \mathrm{d}^3 r' \, \frac{f\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Anwendung auf die Wellengleichung für die Potentiale:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \, \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \, \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Damit sind die inhomogenen Potentialgleichungen formal gelöst.