

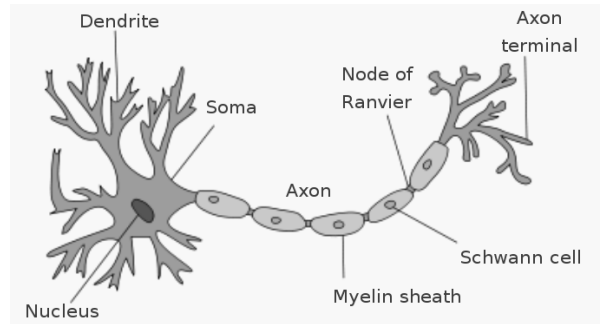
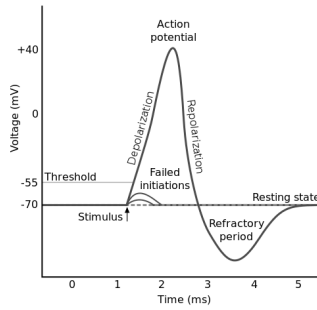
English summary:

The human brain: # neurons $\approx 10^{11}$, # synapses $\approx 10^{15}$

spatial scales: 10cm, ..., 10 μ m

temporal scales: years, ..., \ll ms

action potential:



1.1 Fundamentals

dynamical system: $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)$, \underline{x} : n dynamical variables

\underline{F} : vector field (nonlin.)

flow of vectorfield \underline{F} : $\phi: M \times \mathbb{R}_t \rightarrow M$ with $\phi(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{manifold}}}{\underline{x}_0}, t) = \phi_t(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{initial condition}}}{\underline{x}_0}) = \underline{x}(t; \underline{x}_0)$

fixed point \underline{x}^* of an autonomous dynamical system $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$

if $\dot{\underline{x}} = 0 \Rightarrow \underline{F}(\underline{x}^*) = 0 \Rightarrow$ conditions to find \underline{x}^* .
equations

Fortsetzung 1.1 Grundbegriffe

Stabilität eines Fixpunktes:



Text durch Linearisierung für kleine Auslenkungen: $\delta \underline{x} = \underline{x} - \underline{x}^*$

=> lineare Stabilitätsanalyse

$$\underline{\delta x} = \underline{x} - \underline{x}^* = \underline{F}(\underline{x}) - \underbrace{\underline{F}(\underline{x}^*)}_{=0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylor}}}{\approx} \underbrace{\left(\frac{DF}{d\underline{x}}\right)_{\underline{x}^*}}_{\text{Jacobi-Matrix ausgewertet bei } \underline{x}^*} (\underline{x} - \underline{x}^*) = \left(\frac{DF}{d\underline{x}}\right)_{\underline{x}^*} \underline{\delta x}$$

=> System von linearen Dgls mit konstanten Koeffizienten

Lösungsansatz $\underline{\delta x} = \underline{f} e^{\lambda t} \Rightarrow \underline{\delta \dot{x}} = \lambda \underline{f} e^{\lambda t} \Rightarrow \boxed{\lambda \underline{f} = \left(\frac{DF}{d\underline{x}}\right)_{\underline{x}^*} \underline{f}}$
Eigenwertgl.

λ_k : Eigenwerte
 $\underline{f}^{(k)}$: Eigenvektoren } der Jacobi-Matrix

allgemeine Lösung: $\underline{\delta x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \underline{f}^{(k)} e^{\lambda_k t}$
sind durch Anfangsbedingungen bestimmt.

Stabilitätsbegriffe:

\underline{x}^* heißt stabil (Ljapunov-stabil), wenn zu jeder Umgebung U von \underline{x}^* eine Umgebung V von \underline{x}^* existiert, so dass gilt:

$$\underline{x} \in V \Rightarrow \phi(\underline{x}, t) \in U \quad \forall t \geq 0.$$



\underline{x}^* heißt asymptotisch stabil, wenn zu \underline{x}^* eine Umgebung U ex.,
so dass gilt: $\phi(U, t_2) \subset \phi(U, t_1) \subset U$ für $0 < t_1 < t_2$

und $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(\underline{x}, t) = \underline{x}^* \quad \forall \underline{x} \in U.$



U sehr um Δ^* mit wachsendem t auf Δ^* zusammen.

Phasenraumvolumina schrumpfen \Rightarrow dissipatives System

Kriterium für (Ljapunov-) Stabilität: Kein Eigenwert von $(DF)_{\underline{x}^*}$ hat positiven Realteil.

hinreichende Bedingung für asymptotische Stabilität:

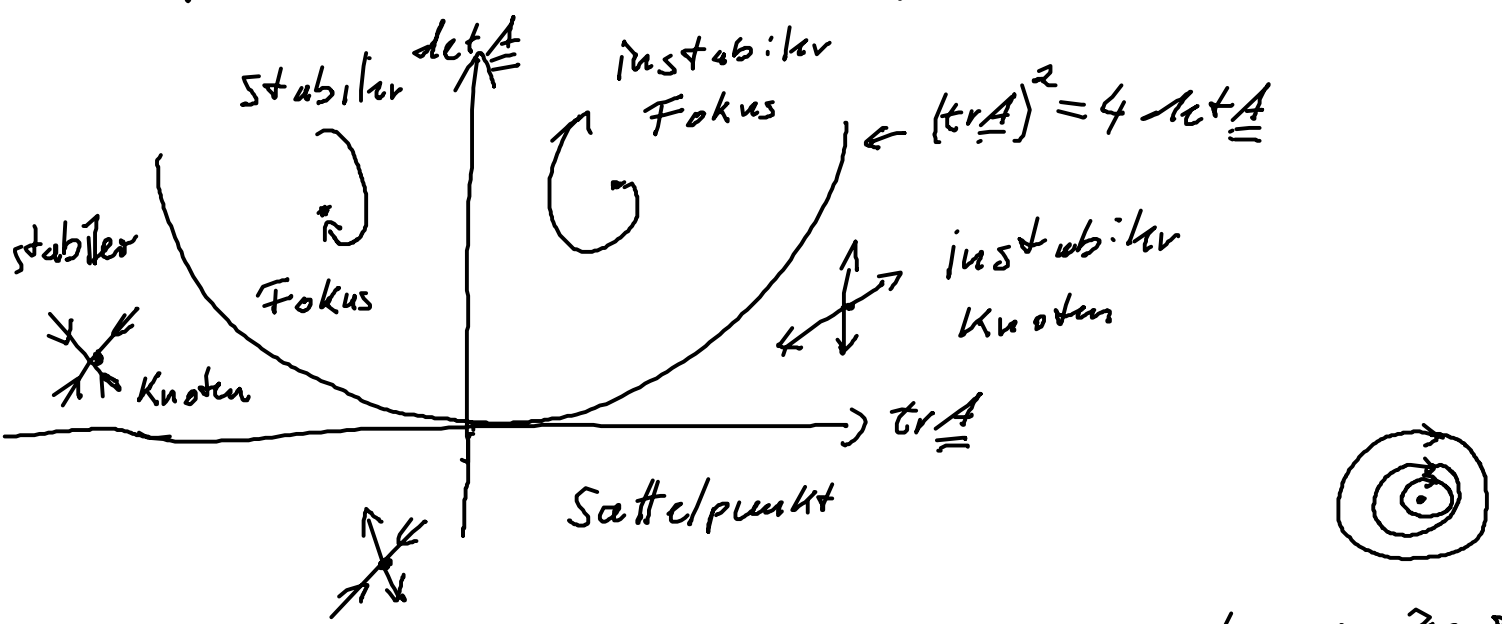
Alle Eigenwerte haben negative Realteile.

Allgemeines System mit $n=2$:
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{Jacobi-Matrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Eigenwerte:
$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \det(\underline{A} - \lambda \underline{1}) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21}$$

$$= \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} \underline{A} + \det \underline{A} \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tr} \underline{A} \pm \sqrt{(\operatorname{tr} \underline{A})^2 - 4 \det \underline{A}} \right)$, $\operatorname{tr} \underline{A} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \underline{F}$



Grenze: entartete Fälle: $\operatorname{tr} \underline{A} = 0, \det \underline{A} > 0$: entweder Zentrum oder schwach stabiler/instabiler Fokus (\Rightarrow höhere Terme der Taylor-Entwicklung nötig)

qualitative Änderung im Verhalten des Flusses in Abhängigkeit
 des Systemparameters ist möglich \Rightarrow Bifurkation
 = Verzweigung der Lösungsmannigfaltigkeit

1.2. Bifurkationen

Bifurkation: Zahl und Art der Attraktoren kann sich schlagartig bei einem kritischen Wert eines Systemparameters ändern.

Klassifizierung von Bifurkationen:

(A) Eigenwert-Null-Bifurkation: $\lambda < 0 \rightarrow \lambda > 0$

(A1) Sattel-Knoten-Bifurkation

$\dot{x} = \mu - x^2$

(A2) Transkritische Bifurkation

$\dot{x} = \mu x - x^2 \Rightarrow \delta \dot{x} = (\mu - 2x^*) \delta x$

$x^* = \begin{cases} 0 \\ \mu \end{cases}$
 $\lambda = \begin{cases} \mu \\ -\mu \end{cases} \Rightarrow$ Stabilitätswechsel bei $\mu_c = 0$

Generalisierung in $n=2$:

$x^* = \mu < 0 \quad x^* = 0$

$x^* = 0 \quad x^* = \mu > 0$

Bifurkation bei $\mu_c = 0$

$x^* = 0 = \mu_c$

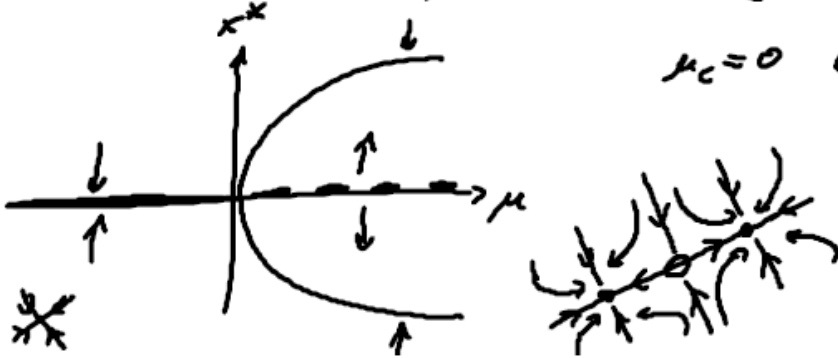
(A3) Stimmgabel-Bifurkation

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \Rightarrow \delta \dot{x} = (\mu - 3(x^*)^2) \delta x$$

$$x^* = \begin{cases} 0 \\ \pm \sqrt{\mu} \text{ für } \mu > 0 \end{cases}$$

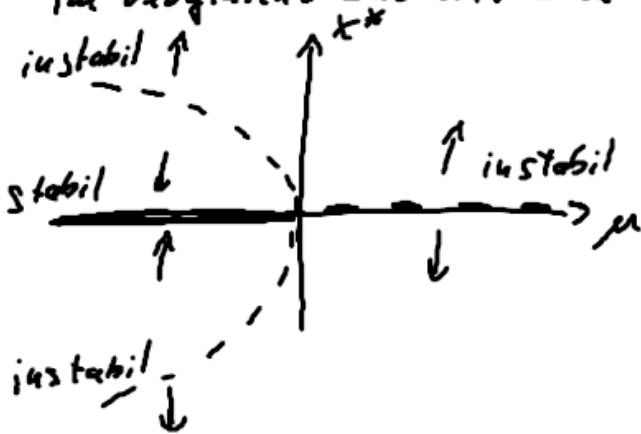
$$\lambda = \begin{cases} \mu & \text{stabil für } \mu < 0 \\ -2\mu & \text{stabil für } \mu > 0 \end{cases}$$

$\mu_c = 0$ Entstehung 2 weiterer Fixpunkte
 $\mu < 0$: 1 FP, $\mu > 0$: 3 FP

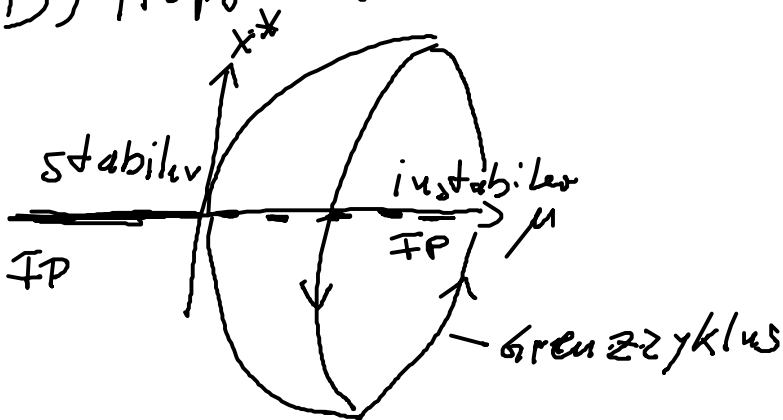


(supercritische Stimmgabel-Bifurkation)

im Vergleich: subkritische Stimmgabel-Bifurkation: $\dot{x} = \mu x + x^3$

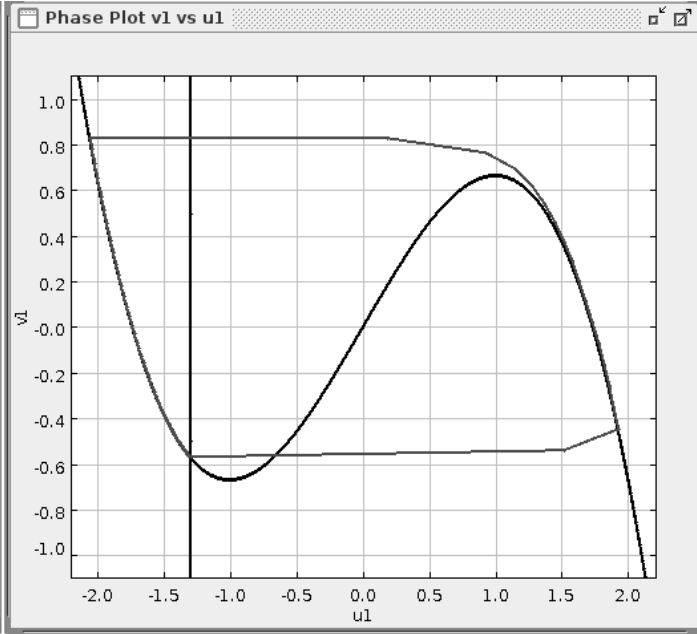
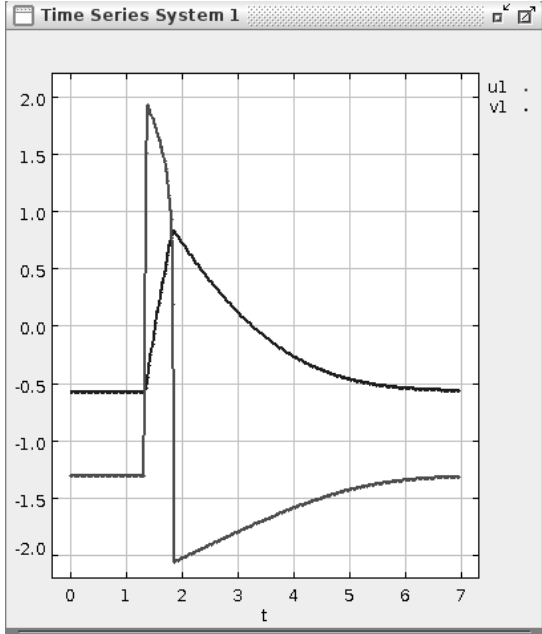


(B) Hopf-Bifurkation (Andronov-Hopf-Bif.): $n=2$



Bsp.: FitzHugh-Nagumo

$$\begin{cases} \dot{u} = u - \frac{u^3}{3} - v \\ \dot{v} = u + a \end{cases}$$



Pause Restart

Time Scale Separation ϵ_1 0.010

Time Scale Separation ϵ_2 0.010

Threshold Parameter a_1 1.300

Threshold Parameter a_2 1.300

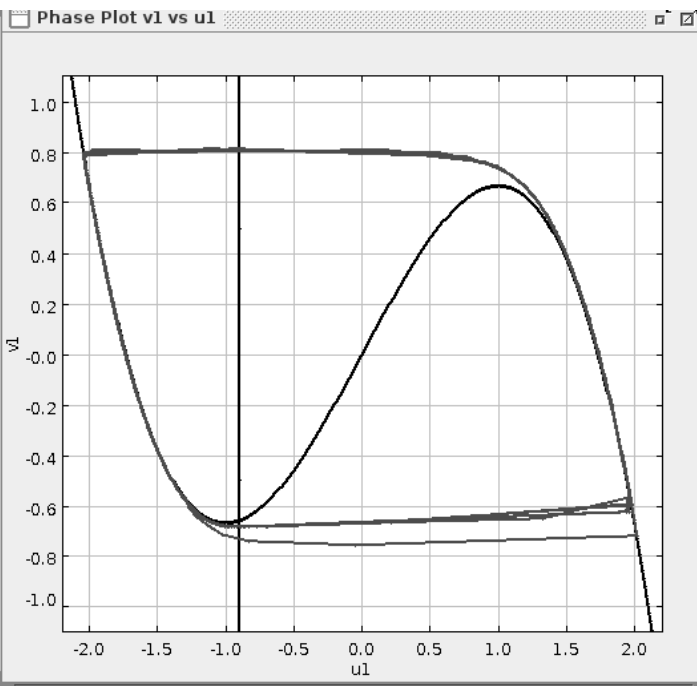
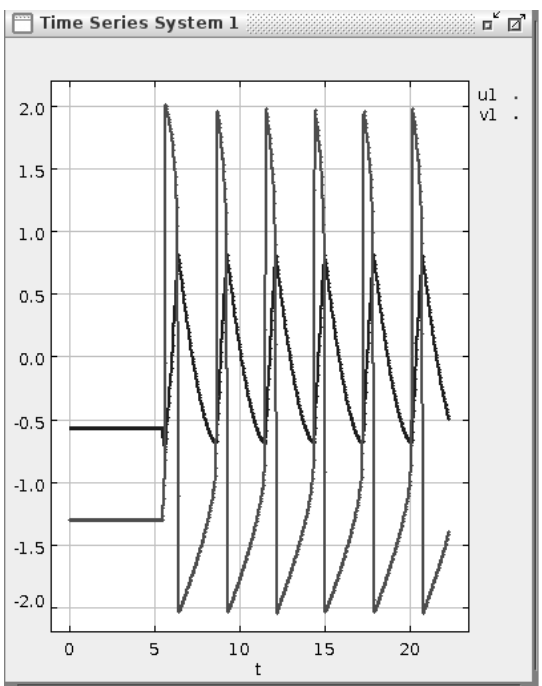
Coupling Strength C 0.000

Coupling Delay τ 0.000

Feedback Strength K 0.000

Feedback Delay τ_K 0.000

Stim Size Δu_1 1.



Pause Restart

Time Scale Separation ϵ_1 0.010

Time Scale Separation ϵ_2 0.010

Threshold Parameter a_1 0.900

Threshold Parameter a_2 1.300

Coupling Strength C 0.000

Coupling Delay τ 0.000

Feedback Strength K 0.000

Feedback Delay τ_K 0.000

Stim Size Δu_1 1.