

7. Neue Mathematische Entwicklungen stimulieren die Entwicklung der Quantentheorie

7.1 Motiv

Gegenüber der klassischen Mechanik bedarf die Quantenmechanik einiger neuer mathematischer Werkzeuge, die hier skizziert werden.

Das von einem strikten Lokalisierungsprinzip geleitete Teilchenbild wird im 3-dimensionalen **Ortsraum** \mathbb{R}^3 durch drei reelle Koordinaten $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ entworfen. In der klassischen Mechanik wird die Bewegung eines Massenpunktes durch die Ortskoordinaten und durch die Impulsdaten $(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ vollständig beschrieben. (Zur Erinnerung: $p = m \cdot v$.) Die drei Impulskomponenten sind, wie die drei Ortskoordinaten, reelle Zahlen. Die Impulsdaten bilden den **Impulsraum**. Ortsraum und Impulsraum sind mathematisch isomorph. Sie werden zum sogenannten **Phasenraum** (eines einzelnen Massenpunktes)

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^6, \quad (x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^6$$

zusammengefasst.

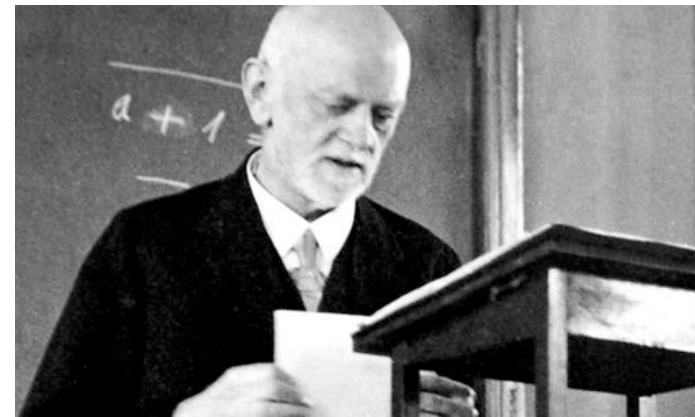
In der klassischen Mechanik bestimmen die vollständigen Phasenraumdaten den physikalischen Zustand des Systems.

In der Quantenmechanik wird die gleichzeitige Kenntnis von Ort und Impuls ausgeschlossen. Das folgt aus der Heisenbergschen Vertauschungsrelation und explizit aus der Heisenbergschen Unschärferelation; die Unschärferelation folgt aus der Vertauschungsrelation (siehe nächstes Kapitel „Grundstruktur der Quantentheorie“). Damit ist der Phasenraum \mathbb{R}^6 der klassischen Mechanik als Raum der physikalischen Zustände der Quantenmechanik ausgeschlossen.

Obwohl der Ortsraum und der Impulsraum mathematisch isomorph sind, ist der Zahlenraum \mathbb{R}^3 den Anforderungen einer Struktur eines quantenmechanischen Zustandsraums nicht gewachsen. Zu diesen Anforderungen gehört, die Korrespondenz zwischen Teilchen und Welle zu implementieren. Auf der Ebene der Zahlentripel im \mathbb{R}^3 ist das nicht zu leisten. Eine hinreichend reichhaltige Struktur gibt es auf der Ebene der Funktionenräume. Auf dieser Ebene lässt sich die Vertauschungsrelation formulieren. Als maßgeschneidertes mathematisches Objekt zur Repräsentation des quantenmechanischen Zustandsraums stellt sich der Raum der bezüglich des sogenannten „Lebesgue-Maßes“ quadratintegrierbaren Funktionen über dem Raum \mathbb{R}^3 heraus. Dieser Raum $L^2(\mathbb{R}^3)$ erfüllt die mathematischen Kriterien eines sogenannten „Hilbertraums“.

Die Interpretation der Quantenmechanik ist seit ihrem Beginn bis heute umstritten. Doch der mathematische Rahmen der Quantenmechanik ist unbestritten. Für die Diskussion des Verständnisses der Quantenmechanik ist damit der Hilbertraum eine zuverlässige Referenz. Der Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^3)$ kommt im häufig verwendeten Begriff der ψ -Funktion vor. Die Diskussion der Interpretation der Quantenmechanik wird zu einem wesentlichen Teil auf die Diskussion der Bedeutung der ψ -Funktion abgewälzt.

7.2 Eine historische Notiz



goettinger-tageblatt.de

David Hilbert (* Königsberg, 1862, † Göttingen, 1943)

Theorie der algebraischen Zahlkörper,
Axiomatisierung der Mathematik,
Integralgleichungen, „**Hilbert-Raum**“ (1909),
Lösung der Boltzmann-Gleichung,
Variationsprinzip für die Einsteinschen Gleichungen.

Beim internationalen Mathematiker-Kongreß 1900 in Paris präsentierte er 23 mathematische Probleme des 20. Jahrhunderts. Die Hälfte ist bis heute nicht gelöst.

Hermann Weyl (* Elmshorn, 1885, † Zürich, 1955)
ETH Zürich (1913); Göttingen (1930), Nachfolger Hilberts;
Institute for Advanced Study, Princeton (1933-1951).

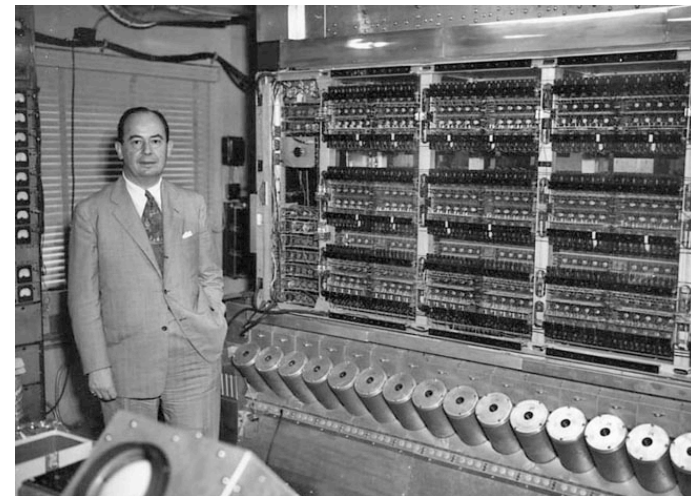
Integralgleichungen, Eigenwertprobleme und Spektraldarstellungen,
Theorie der algebraischen und analytischen Funktionen,
Theorie und Darstellung kontinuierlicher Gruppen, Zahlentheorie,
mathematische Logik.

„Raum, Zeit und Materie“ (1918),
„Gruppentheorie und Quantenmechanik“ (1928).



en.wikipedia.org

John von Neumann (* Budapest, 1903, † Washington, 1957)
Göttingen (1926/1927), Zusammenarbeit mit Hilbert;
Berlin (1928-1933), Institute for Advanced Study, Princeton (1933),
Los Alamos (1943), Mitarbeit im Manhattan-Projekt zum Bau
einer Atombombe.



theregister.co.uk

1927 Quantenmechanische Entropie, Operator-Algebren, Spieltheorie, Quantenlogik, Gruppentheorie,
Automatentheorie. Von-Neumann-Architektur eines Computers (Programmbefehle und Daten im gleichen Speicher).
„Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik“ (1932).

Vernetzung der mathematischen Physik am Ende des 19. und zu Beginn des 20. Jahrhunderts

Erstaunlich viele mathematisch interessierten Physiker resp. viele physikalisch interessierten Mathematiker stammen aus **Königsberg**. Im Rahmen der preussischen Reformen modernisierte und erweiterte Wilhelm von Humboldt die Königsberger Universität. 1810 setzte er sich für die Berufung von Friedrich Wilhelm Bessel als Ordinarius für Astronomie nach Königsberg ein. Mit ihm lehrte auch der Mathematiker Jacobi in Königsberg. Franz Ernst Neumann habilitiert sich in Königsberg, befreundet sich mit Bessel. Neumann wird Ordinarius für Mineralogie und Physik. Er trägt entscheidend zur Gründung der theoretischen Physik in Deutschland bei: Königsberger Schule. Seine Schüler besetzten zahlreiche Lehrstühle in Deutschland:

Gustav Robert Kirchhoff, geboren in Königsberg, studiert dort.

David Hilbert, in Königsberg geboren, studiert und lehrt dort;

Hermann Minkowski in Russland geboren, Familie emigriert nach Königsberg, er studiert und promoviert dort;

Adolf Hurwitz, zum Extraordinariat nach Königsberg berufen.

(Erwähnenswert: Jürgen Moser 1928-1999. 1947 Göttingen, 1955 Courant Institute, New York, bei Richard Courant, 1980 ETH Zürich. KAM-Theorem.)

Eberhard Müller: Grundlagen und Interpretation der Quantentheorie. Mathematische Bemerkung.

Minkowski, Hurwitz gehen an die **ETH Zürich**. Bei ihnen studiert Einstein.
Hilbert geht nach Göttingen.

In **München** lehrt Sommerfeld. Er schickt regelmäßig Assistenten zu Hilbert nach Göttingen.

Hilberts Assistenten in **Göttingen**: Max Born, Hermann Weyl, Richard Courant, Emmy Noether
(Zusammenhang zwischen Symmetrie-Transformationen und Erhaltungsgrößen).
Borns Assistenten: Werner Heisenberg, Wolfgang Pauli.

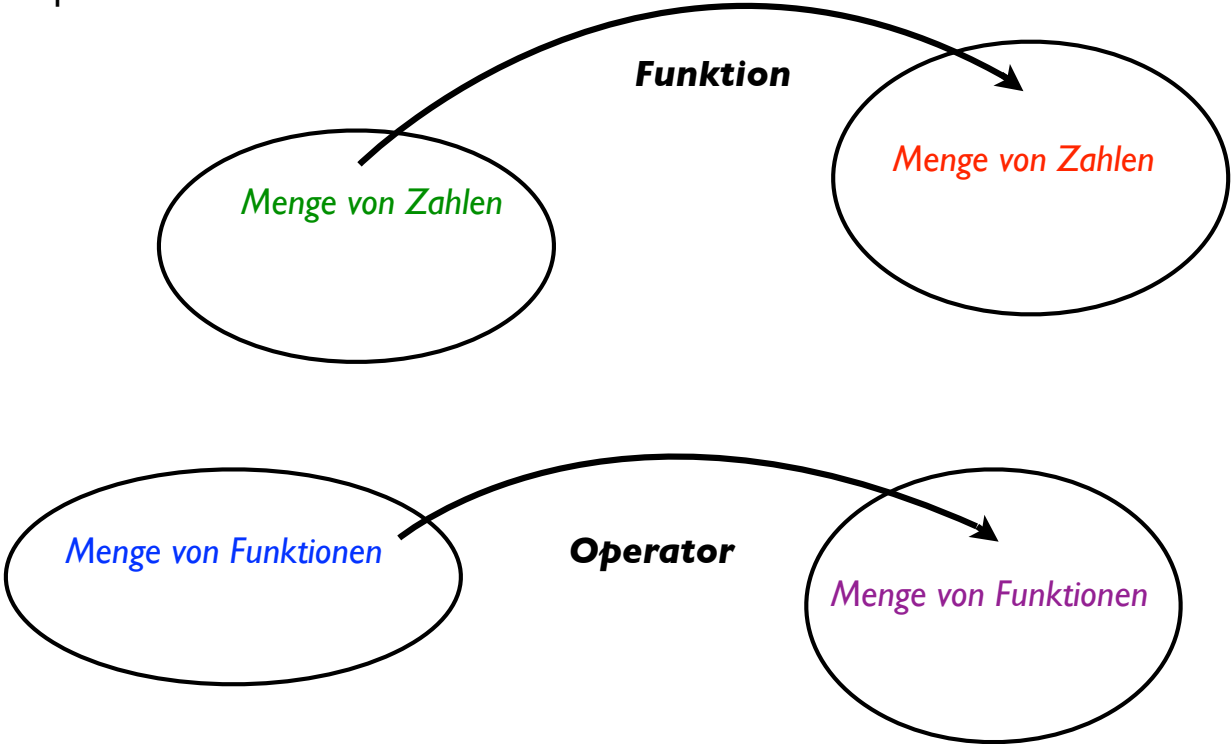
Felix Klein (euklidische und nichteuklidische Symmetrie-Gruppen in der Physik): Erlangen, **Leipzig**, Göttingen.
Zusammen mit Friedrich Althoff vom preußischen Kulturministerium betrieb er den mathematisch-physikalischen Ausbau der Göttinger Universität (Siehe wikipedia.org/wiki/Felix_Klein). Auch Walther Nernst (1891-1905, danach Berlin), James Franck (1920-1933), Peter Debye (1913-1920, danach bis 1927 ETH Zürich, danach Berlin) wurden nach Göttingen berufen.

Als „Welthauptstadt der Physik“ galt **Berlin** bis 1933.

Diese beschriebene Vernetzung ist für die Entwicklung der Quantenmechanik von größter Bedeutung.

7.3 Mathematische Grundbegriffe

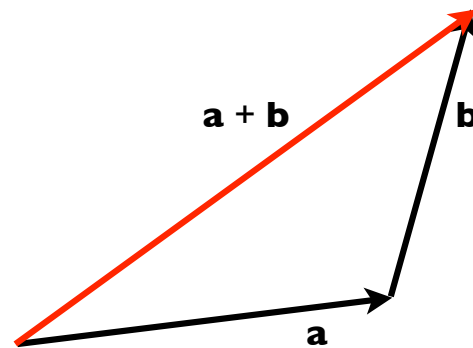
natürliche Zahlen: 1, 2, 3, 4,
ganze Zahlen, rationale Zahlen,
reelle Zahlen, komplexe Zahlen



Vektoren haben, im Rahmen der analytischen Geometrie, Richtung und Länge.
In Bezug zu einem festgelegten Koordinatensystem lassen sich Vektoren durch Zahlentupel mit den Koordinatenwerten charakterisieren.

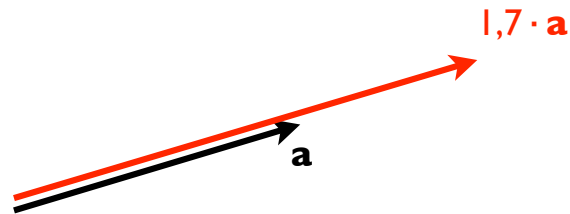
Vektor-Addition:

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$$



skalare Multiplikation mit Vektoren

$$\lambda \cdot (a_1, a_2, a_3) = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \lambda \cdot a_3)$$

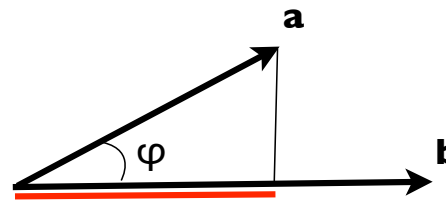


Skalarprodukt zweier Vektoren

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \varphi$$

$$|a| = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2}$$

$|a|$ gibt die Länge eines Vektors an.



Definition einer „**Gruppe**“:

Auf einer beliebigen Menge M sei eine Verknüpfung „+“ definiert,
d. h. eine Abbildung: $\varphi_+ : M \times M \rightarrow M$ mit $x + y := \varphi_+(x, y)$ für $x, y \in M$,
so dass gilt:

- | | | |
|-------|---|---------------------------------|
| (I.a) | $(x + y) + z = x + (y + z)$ für alle $x, y \in M$ | Assoziativgesetz |
| (I.b) | Es existiert ein Element $0 \in M$ mit $x + 0 = x$ für alle $x \in M$ | Existenz des neutralen Elements |
| (I.c) | Zu jedem $x \in M$ existiert ein $y \in M$ mit $x + y = 0$ | Existenz des Inversen |
| (I.d) | $x + y = y + x$ für alle $x, y \in M$. | Kommutativgesetz |

Kriterien (I.a), (I.b), (I.c), (I.d) definieren eine **kommutative** (additiv geschriebene) **Gruppe**

Definition einer multiplikativ geschriebenen **kommutativen Gruppe**:

Auf einer beliebigen Menge M sei eine Verknüpfung „ $*$ “ definiert,
d. h. eine Abbildung: $\varphi_* : M \times M \rightarrow M$ mit $x * y := \varphi_*(x, y)$ für $x, y \in M$,
so dass gilt:

- | | | |
|--------|---|---------------------------------|
| (II.a) | $(x * y) * z = x * (y * z)$ für alle $x, y \in M$ | Assoziativgesetz |
| (II.b) | Es existiert ein Element $I \in M$ mit $x * I = x$ für alle $x \in M$ | Existenz des neutralen Elements |
| (II.c) | Zu jedem $x \in M$ existiert ein $y \in M$ mit $x * y = I$ | Existenz des Inversen |
| (II.d) | $x * y = y * x$ für alle $x, y \in M$. | Kommutativgesetz |

Kriterien (II.a), (II.b), (II.c) definieren eine **nicht-kommutative Gruppe**.
Kriterium (II.a) definiert eine **Halbgruppe**.

Verträglichkeit der Addition und Multiplikation in derselben Struktur: **Distributivgesetze**

Auf M sei eine Verknüpfung „+“ und eine Verknüpfung „*“ definiert, so dass gilt:

$$(III.a) \quad (x + y) * z = x * z + y * z \quad \text{für alle } x, y, z \in M$$

$$(III.b) \quad z * (x + y) = z * x + z * y \quad \text{für alle } x, y, z \in M$$

Definition eines (Zahlen-) „**Körpers**“:

Eine Menge M mit der Struktur einer additiv geschriebenen kommutativen Gruppe, und einer multiplikativ geschriebenen kommutativen Gruppe auf den von 0 verschiedenen Elementen von M , auf der das Distributivgesetz (III.a) (und damit (III.b)) gilt, heißt ein Körper.

Beispiele von Zahlen-Körpern: rationale Zahlen, reelle Zahlen, komplexe Zahlen.

Definition eines Vektorraums

Sei \mathbb{K} ein Körper. Unter einem \mathbb{K} -**Vektorraum** versteht man ein Tripel $(V, +, \cdot)$, gegeben durch eine kommutative Gruppe $(V, +)$ und eine skalare Multiplikation genannte Verknüpfung

$\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$, notiert als

$$(\lambda, v) \rightarrow \lambda \cdot v,$$

so dass die folgenden Axiome erfüllt sind:

$$(V.1) \quad 1 \cdot v = v$$

$$(V.2) \quad \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \mu) \cdot v$$

$$(V.3) \quad \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$$

$$(V.4) \quad (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$$

(Oft wird das Zeichen „ \cdot “ für die Multiplikation mit einem Skalar weggelassen, wenn es sich aus dem Kontext ergibt.)

Beispiele eines Vektorraums:

$$\mathbb{R}^N := \{ (a_1, \dots, a_N) \mid a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N \}$$

$$\mathcal{F} := \{ f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \} \quad \text{Funktionen-Raum}$$

Auch der Raum der komplexen Funktionen ist ein Vektorraum über den Körper der komplexen Zahlen.

Definition **Skalarprodukt** (oder **inneres Produkt**)

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Abbildung

$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt (oder inneres Produkt), falls

$$(IP.1) \quad \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

$$(IP.2) \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$(IP.3) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$(IP.4) \quad \langle x, x \rangle \geq 0$$

$$(IP.5) \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

für alle $x, x_1, x_2, y \in V$ und für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.

Der Überstrich in (IP.3) bedeutet für komplexe Zahlen $z = x + i y$ das konjugiert Komplexe: $\bar{z} = x - i y$, wobei x, y reelle Zahlen sind.

Mit Hilfe des Skalarprodukts lässt sich eine Norm („Länge“ des Vektor-Elements)

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

und eine Metrik definieren, mit der Abstände zwischen den Elementen von V bestimmt werden können:

$$d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

Mit der Norm ist der Vektorraum V mit den Kriterien (IP.1) bis (IP.5) ein **Prähilbertraum**.

Definition Hilbertraum:

Der mittels der Metrik vervollständigte Prähilbertraum heißt **Hilbertraum**.

(Vervollständigt heißt, dass bezüglich der Metrik die Limites konvergenter Folgen von Elementen des Prähilbertraums V ebenfalls zu V gehören.)

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Ist V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dann gilt

$$(35) \quad |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in V$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn x und y linear unabhängig sind.

N Vektoren x_1, \dots, x_N heißen linear unabhängig, wenn aus $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_N x_N = 0$ folgt, dass die Skalare (Zahlen) $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_N = 0$.

Beweis: Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle && \text{Positivität des Skalarprodukts (IP.4)} \\
 &= \langle x, x + \lambda y \rangle + \langle \lambda y, x + \lambda y \rangle && \text{wegen (IP.1)} \\
 &= \overline{\langle x + \lambda y, x \rangle} + \overline{\langle x + \lambda y, \lambda y \rangle} && \text{wegen (IP.3)} \\
 &= \overline{\langle x, x \rangle} + \overline{\langle \lambda y, x \rangle} + \overline{\langle x, \lambda y \rangle} + \overline{\langle \lambda y, \lambda y \rangle} && \text{wegen (IP.1)} \\
 &= \langle x, x \rangle + \langle x, \lambda y \rangle + \langle \lambda y, x \rangle + \langle \lambda y, \lambda y \rangle && \text{wegen (IP.3)} \\
 &= \langle x, x \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \overline{\langle x, y \rangle} + \bar{\lambda} \lambda \langle y, y \rangle && \text{wegen (IP.2) und (IP.3)}
 \end{aligned}$$

Setze $\lambda = -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$, falls $y \neq 0$. Für $y = 0$ ist die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung trivial.

Das gewählte λ eingesetzt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle x - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y, x - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y \right\rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \frac{\overline{\langle x, y \rangle} \langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} - \frac{\langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle}}{\langle y, y \rangle} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle^2} \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \end{aligned}$$

Umformung:

$$\frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \leq \langle x, x \rangle . \text{ Daraus folgt Gleichung (35). q.e.d.}$$

(Hinweis zur weitergehenden Orientierung: [38], S. 173 ff.)

Zwischenbilanz

Das Sowohl Welle als auch Teilchen, das wir beim Lichtquant (Photon) kennengelernt haben, erfordert neue mathematische Werkzeuge. Der mathematische Rahmen, der für die klassische Physik, für die Newtonsche Mechanik wie auch für die klassische Elektrodynamik entwickelt worden war, passt für die Quantentheorie nicht mehr. In der Krisenphase der Physik, 1900 - 1925, konstruierte David Hilbert um 1909 den „Hilbert-Raum“, der sich als zentraler mathematischer Schlüssel zur Beschreibung des quantenmechanischen Zustandsraums herausstellen sollte.

Elemente des Hilbertraums lassen sich addieren (sie bilden eine additive kommutative Gruppe). Diese grundlegende Eigenschaft wird von quantenmechanischen Zustandsfunktionen verlangt. Damit wird sich das sogenannte „Superpositionsprinzip“ formulieren, nach dem physikalische Zustände „überlagert“ werden können. Es gehört zur Grundlage der Quantenmechanik, was im folgenden Kapitel vorgestellt wird. Die Verbindung von Vektorraum-Struktur mit Skalarprodukt vereinigt im Hilbertraum die Leistungsfähigkeit der analytischen Geometrie (sie kann sagen, wann Vektoren zueinander orthogonal sind) mit der Reichhaltigkeit eines Funktionenraums. So macht Letzteres es möglich, eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantenmechanik einzuführen. Dies werden wir im übernächsten Kapitel „Zur Interpretation der Quantentheorie“ behandeln.

Darüberhinaus werden wir sehen, dass die Operatoren der Quantenmechanik, beispielsweise der Impulsoperator und der Ortsoperator, auf einem Hilbertraum definiert werden. Während für die Operatoren zusätzlich zur Addition eine Multiplikation definiert wird, gibt es für die Elemente eines Hilbertraums keine Multiplikation, so dass das Produkt zweier Elemente wieder ein Element des Hilbertraums wäre. Das ist zu unterscheiden vom Skalarprodukt zweier Hilbertraum-Vektoren, das eine Zahl ist. Und auch von der Multiplikation eines Skalars mit einem Hilbertraumvektor.

Auf der Ebene der Operatoren führt die nicht-kommutative Multiplikation ein „Nacheinander“ ein. Auf der Ebene des Hilbertraums gibt es nur ein „Nebeneinander“.

8. Grundstruktur der Quantentheorie

8.1 Historische Skizze zur Quantenmechanik

Werner Heisenberg ist am 5. Dezember 1901 in Würzburg geboren.

Der Großvater führte in Osnabrück ein Schlossergeschäft.

Werners Vater, August Heisenberg, war Gymnasiallehrer für alte Sprachen in Würzburg; 1910 Ordinarius für Byzantinistik an der Universität München, Umzug der Familie.

Die Mutter Werner Heisenbergs war Tochter des Rektors des Maximiliansgymnasium in München. [39]

1920 begann Werner Heisenberg das Physikstudium bei Arnold Sommerfeld in München.

1922 erstes Zusammentreffen mit Niels Bohr in Göttingen. Studium in Göttingen bei Max Born.

1923 Dissertation in München.

1924 Habilitation in Göttingen.

1924-1925 als Rockefeller-Stipendiat am Bohr-Institut in Kopenhagen.

[39] David C. Cassidy: „Werner Heisenberg“. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 2001; Amerikanische Originalausgabe: “Uncertainty. The Life and Science of Werner Heisenberg, Freeman, New York, 1992.

Juni 1925 Aufenthalt auf Helgoland. Beginn der **nicht-kommutativen Matrizenmechanik** [40].

Den klassischen Bahnbegriff vermeidend betrachtet Heisenberg die Gesamtheit der Schwingungsfrequenzen und der „Amplituden“ (Übergangswahrscheinlichkeiten), die die Intensität der Spektrallinien bestimmen [41], [42]. Er benutzt intuitiv die Matrizenmultiplikation, ohne zu diesem Zeitpunkt den mathematischen Begriff der Matrix zu kennen.

Eine mathematische Ausarbeitung von Heisenbergs Ansatz folgt in einer Arbeit von Max Born und Pascual Jordan [44] und in einer folgenden Arbeit von allen Dreien [45]. In [44] ist die Vertauschungsrelation (33) erstmals explizit formuliert.

[40] Werner Heisenberg: „Der Teil und das Ganze“. dtv, München, 1973, S. 74 ff.

[41] Werner Heisenberg: „Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen“. Zeitschrift für Physik, 33 (1925), S. 879.

[42] Brief von Werner Heisenberg an Wolfgang Pauli, 24. Juni 1925.
Auf der Rückfahrt von Helgoland besuchte Heisenberg Pauli in Hamburg für wenige Stunden, bedankte sich dafür mit Brief vom 21. Juni 1925. Hinweise dazu in [43], S. 89.

[43] Armin Hermann: „Die Jahrhundertwissenschaft. Werner Heisenberg und die Geschichte der Atomphysik“.rororo, Reinbek bei Hamburg, 1993.

[44] Max Born, Pascual Jordan: „Zur Quantenmechanik“. Zeitschrift für Physik 34 (1925), S. 858-888.

[45] Max Born, Werner Heisenberg, Pascual Jordan: „Zur Quantenmechanik II“. Zeitschrift für Physik 35 (1925), S. 557-615.

Eine wertvolle ausführliche Diskussion der historischen Abläufe findet sich bei Max Jammer [34], S. 196 ff..

Jordan war Assistent bei Courant [46] während der Arbeit am später weltweit verbreiteten Buch von Courant und Hilbert zu den „Methoden der Mathematischen Physik“ [48]. Jordan war deshalb mit dem Umgang mit Matrizen bestens vertraut (Interview mit Max Jammer am 17. Juni 1963. Siehe [34], S. 207, dort Fußnote ³⁶.)

Born lernte Jordan bei einer Zugfahrt nach Hannover zufällig kennen ([34], S. 207 ff.). Born sprach mit einem Kollegen über die sonderbaren Schwierigkeiten bei den Rechnungen mit Matrizen. Jordan bekam das Gespräch mit und stellte sich Born am Bahnhof in Hannover vor. Er erklärt seine Bereitschaft, ihn bei der Behandlung der Matrizen zu unterstützen.

[46] Richard Courant (1888-1972) war Doktorand von Hilbert. Er wurde 1922 auf den Lehrstuhl von Felix Klein an der Universität Göttingen berufen und war dessen Nachfolger. Er emigrierte 1933 über Cambridge nach New York und baute das „Courant Institute for Mathematical Sciences“ auf, das 1964 nach ihm benannt wurde.

- Edith Stein (1891-1942) war seine Cousine. Sie promovierte mit Auszeichnung bei Husserl in Freiburg „Zum Problem der Einfühlung“ und versuchte vier Mal, eine Habilitation einzureichen, was ihr verwehrt wurde. Eine Arbeit „Psychische Kausalität“ hatte sie in Göttingen vorgelegt, eine Arbeit „Akt und Potenz“ in Breslau und Freiburg i. Breisgau. 1922 konvertierte sie zum Katholizismus, 1933 trat sie in den Karmel-Orden ein. Sie wurde zusammen mit ihrer Schwester Rosa am 9. August 1942 in Auschwitz-Birkenau vergast. 1999 wurde sie heiliggesprochen. [47]

[47] https://de.wikipedia.org/wiki/Edith_Stein.

[48] R. Courant, D. Hilbert: „Methoden der Mathematischen Physik“, Springer-Verlag, Berlin, Band 1, 1924, Band 2, 1937.

Bohr's Reaktion auf Heisenbergs Matrizenmechanik, wie Heisenberg sich erinnert ([34], S. 211): „Ich werde die Erregung nicht vergessen, als ich es schaffte, seine [Heisenbergs] Ideen zu den Quantenbedingungen auf die mysteriöse Gleichung $pq - qp = h/2\pi i$ zu reduzieren“.

Bohr hat den Gedanken der Komplementarität als eine Grundfigur der Quantenmechanik entwickelt und in Diskussionen und Abhandlungen sehr engagiert vertreten [49]. Mit Heisenberg hat er über einen langen Zeitraum intensiv zusammengearbeitet und unzählige lange Diskussionen geführt. Für Bohr ist die Vertauschungsrelation (33) das mathematische Kondensat der Komplementarität zwischen Wellenbild und Teilchenbild. Anders ausgedrückt:

Die Vertauschungsrelation (33) ist die mathematische Formulierung der Dialektik zwischen Wellenbild und Teilchenbild.

[49] Hans Primas: „Chemistry, Quantum Mechanics and Reductionism“, mit einem Vorwort von Paul Feyerabend. Lecture Notes in Chemistry 24, Springer-Verlag Berlin, 1981. In einem inhaltlich weit aufgespannten Spektrum bezieht sich das Buch auf wichtige Originalarbeiten. U. a. hat sich Primas mit Bohrs Begriff der Komplementarität intensiv befasst.

Mit Heisenbergs neuem Matrizenansatz schafft Wolfgang Pauli in kurzer Zeit die anspruchsvolle Herausforderung, das Wasserstoffatom zu berechnen [50]. Für einen Durchbruch der Matrizenmechanik war das ein entscheidender Beitrag. Dennoch wird der neue Ansatz von vielen Physikern zunächst reserviert aufgenommen.

Die weitere Entwicklung der Quantenmechanik

Bis 1925 waren entscheidende Belege für Plancks Quantenhypothese die Hohlraumstrahlung (1900), Einsteins Deutung des photoelektrischen Effekts (1905), Einsteins Quantentheorie über spezifische Wärmen bei Festkörpern (1906) und Bohrs Atommodell (1913). Neben der Spektralanalyse der Atome stützte 1913 ein überzeugendes Experiment von James Franck (Assistent von Heinrich Rubens) und Gustav Hertz an der Berliner Universität das Bohrsche Atommodell [19, S. 434]. Dabei werden in einer mit Quecksilberdampf gefüllten Glasröhre Elektronen beschleunigt. Mit zunehmender Spannung nimmt entsprechend der Strom zu, fällt dann ab, um dann wieder zuzunehmen usw. Bei bestimmten Schwellwerten absorbieren die Quecksilberatome einen Teil der Elektronen. Das zeigt die diskreten Energieniveaus der Quantenstruktur der Atome.

[50] Wolfgang Pauli: „Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik“. Zeitschrift für Physik 36 (1926), S. 336-363.

1923 postulierte **Louis de Broglie**, dass die **Welle-Teilchen-Dualität nicht nur für Photonen, sondern auch für Elektronen und prinzipiell für alle massiven Teilchen** gilt [51].

De Broglie überträgt den Zusammenhang zwischen Impuls p und Wellenlänge λ beim Photon auf ein Elektron.

Impuls eines Photons:

$$p = h \cdot \nu / c = h / \lambda$$

Impuls eines Elektrons mit Masse m und Geschwindigkeit v :

$$p = m \cdot v$$

De Broglie-Beziehung:

$$m \cdot v = h / \lambda \Rightarrow \lambda_{\text{de Broglie}} = h / (m \cdot v)$$

Je größer die Masse, desto kleiner ist die de Broglie-Wellenlänge eines materiellen Teilchens.

Je größer die Geschwindigkeit, desto kleiner wird auch die Wellenlänge. Für einen Planeten liegt die de Broglie-Wellenlänge unter jeder Nachweisgrenze. Die empirische Bestätigung gelingt 1927. Mit kurzen Elektronenwellenlängen wird die Auflösung mit einem Elektronenmikroskop im Vergleich zu einem optischen Lichtmikroskop viel größer.

[51] Louis de Broglie: "Ondes et quanta", Comptes Rendus Acad. Sci. (Paris) 177 (1923), S. 507-510;
"Quanta de lumière, diffraction et interférences", s.o. 177 (1923), S. 548-550;
"Les quanta, la théorie cinétique des gaz et le principe de Fermat", s.o. 177 (1923), S. 630-632.

29. November 1924: de Broglies Dissertation in Paris, Doktorvater Langevin.

In Zürich knüpft **Erwin Schrödinger** (1887-1961) an die Arbeiten de Broglies an. Er greift einen Zugang des irischen Physikers William Rowan Hamilton (1805-1865) auf, der mit der sogenannten Eikonal-Näherung die geometrische Optik aus der Wellenoptik ableitet. (Die Strecke eines Lichtstrahls vom Ausgangspunkt bis zum Endpunkt wird als „Eikonal“ bezeichnet.) Motiviert wird Schrödinger durch eine Bemerkung Einsteins in dessen zweitem Paper zum idealen Quantengas, wo Einstein weitergehende Folgerungen des Ansatzes von de Broglie erwartet ([34], S. 249).

Schrödinger war frisch an die Universität Zürich als Nachfolger von Peter Debye berufen worden, nachdem jener einen Lehrstuhl an der ETH angenommen hatte. Zum gemeinsamen Kolloquium der Universität und der ETH bittet Debye Schrödinger um einen Beitrag zu den de Broglie-Papers. Schrödinger war mit der Materie vertraut ([34], S. 257 ff.), nahm die Einladung an und publizierte mehrere Artikel [52]. Darin ist die „Schrödinger-Gleichung“ enthalten. Ihre Lösung gelang mit der Unterstützung von Hermann Weyl.

Schrödinger wollte die Lösung der Schrödinger-Gleichung als eine Materiewelle interpretieren, wie er durch die de Broglie-Wellen inspiriert war. Allerdings gelingt dies nur im Falle eines einzelnen Teilchens. **Bei mehreren Teilchen versagt die Materiewellen-Interpretation.** Damit war Schrödinger extrem unzufrieden.

[52] Erwin Schrödinger: „Quantisierung als Eigenwertproblem“. Annalen der Physik 79 (1926), 1. Mitteilung 27. Januar eingegangen, S. 361-376; 2. Mitteilung 23. Februar eingegangen, S.489-527; 3. Mitteilung 10. Mai 1926 eingegangen, Annalen der Physik 80 (1926), S. 437-490; 4. Mitteilung 21. Juni 1926 eingegangen, Annalen der Physik 81 (1926), S 109-139.

Bald wurde die mathematische Gleichwertigkeit der Matrix-Mechanik Heisenbergs und der Wellen-Mechanik Schrödingers nachgewiesen.

Die zeitliche Priorität der Begründung der Quantenmechanik gehört Heisenberg.

Die Bedeutung der ψ -Funktion (die Lösung der Schrödinger-Gleichung, als auch die Lösung Heisenbergs Matrixgleichung) bleibt (zunächst) obskur, für beide Zugänge gleichermaßen.

Zur Berechnung vieler Problemstellungen der Atomphysik benutzen bis heute die meisten Physiker die Schrödinger-Gleichung. Der einzige Unterschied zur vertrauten Diffusionsgleichung ist die imaginäre Zeitvariable der **Schrödinger-Gleichung**. Sie sorgt dafür, dass ihre **zeitliche Dynamik deterministisch und reversibel** ist und eine Gruppe bildet. Die Zeitvariable durchläuft die gesamte reelle Achse. Im Gegensatz dazu beschreibt die Diffusionsgleichung, die zugleich auch für Wärmeleitung gilt, einen irreversiblen Prozess, der ein (Wärme-) Gleichgewicht anstrebt.

Ihre zeitliche Dynamik bildet eine Halbgruppe. Hier durchläuft die Zeitvariable nur die positive reelle Achse.

In der Schrödinger-Gleichung tritt die zeitliche Ableitung in 1. Ordnung auf, die räumlichen Ableitungen jedoch in 2. Ordnung. Dies zeigt, dass die Schrödingergleichung nicht Einstein-relativistisch ist. Denn in einer relativistischen dynamischen Gleichung müssen die Ableitungen nach der Zeitvariablen und nach den Ortsvariablen notwendig in gleicher Ordnung auftreten. Das trifft für die von Paul Dirac (1902-1984) 1927 gefundene Gleichung zur Beschreibung der Dynamik eines freien Elektrons zu. In der Dirac-Gleichung treten zeitliche und räumliche Ableitungen nur von 1. Ordnung auf. Dies trifft auch für die Maxwell-Gleichungen zu.

Die freie Dirac-Gleichung lässt sich, wie die freien Maxwell-Gleichungen, aus dem Kriterium zur elementaren Zerlegung der Darstellung der Symmetrie-Gruppe der speziellen Relativitätstheorie (Poincaré-Gruppe) herleiten.

Im September 1926 lädt Bohr Schrödinger nach Kopenhagen ein ([40], S. 91 ff.). Es kommt zu einem extrem intensiven Austausch. Bei der Frage der Interpretation der Quantenmechanik verbleiben zwischen Bohr und Heisenberg einerseits und Schrödinger andererseits unüberbrückbare Auffassungen.

1927 stellt Heisenberg die Unschärferelation auf.

Im gleichen Jahr schlägt Max Born (1882-1970) die statistische Interpretation der Quantenmechanik vor

Ebenfalls 1927 fand die fünfte Solvay-Konferenz statt. Im Mittelpunkt stand ein höchst intensiver Disput zwischen Einstein und Bohr. Mit immer neuen Gedankenexperimenten versucht Einstein, Schwächen der neuen Quantenmechanik aufzuzeigen. Bohr kann alle Einwände widerlegen. Die Quantenmechanik besteht ihre Feuerprobe. Keine Einigung gab es in der Frage der Interpretation der Quantenmechanik. Bohr, Heisenberg, Pauli verteidigen Borns statistische Interpretation. Einstein lehnt sie vehement ab. Er will die Kausalität nicht aufgeben: Gott würfeln nicht. Davon wird er nie abweichen.

1935 verfasst Einstein zusammen mit seinen Mitarbeitern Podolski und Rosen einen grundsätzlichen Artikel, in dem er seine kritischen Einwände an der Quantenmechanik festhält [53]. Diese Arbeit zeigt die neue Qualität von Quantenkorrelationen auf. Diese „**EPR-Korrelationen**“, die Einstein ausschloss, werden erstmals 1980 durch den französischen Experimentalphysiker Alain Aspect in seiner Doktorarbeit eindeutig nachgewiesen.

[53] Albert Einstein, Boris Podolski, Nathan Rosen: "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?" Physical Review 47 (1935) S.777.