

VL: Prof. Dr. Dr. h.c. Eckehard Schöll, PhD  
UE: Dr. Anna Zakharova

## 1. Übungsblatt zur Nichtlinearen Dynamik und Kontrolle

**Abgabe:** Mo 07.05. 12:15 in der Übung. Die Abgabe erfolgt in **3er Gruppen**.

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Der Code der Programmieraufgaben kann per E-Mail eingereicht werden. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

**Aufgabe 1 (10 Punkte):** Lotka-Volterra-Modell

Mit den Lotka-Volterra-Gleichungen lassen sich Populationsdynamiken beschreiben. Hier betrachten wir die Wechselwirkungen zwischen einer Population von Schildläusen und Marienkäfer:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= rS - \alpha SM \\ \dot{M} &= -qM + \beta SM\end{aligned}$$

mit  $r > 0$ ,  $q > 0$ ,  $\alpha > 0$  und  $\beta > 0$ .  $S$  bzw.  $M$  beschreibt die Anzahl der Läuse bzw. Marienkäfer.

- a) Kommentieren Sie die biologische Bedeutung der einzelnen Terme.
- b) Finden Sie die Fixpunkte und charakterisieren Sie diese (stabil/instabil, Fokus/Sattel/Knoten). Gibt es Fälle, in denen die lineare Stabilitätsanalyse versagt?
- c) Finden Sie eine Konstante der Bewegung  $c(S, M)$ , indem Sie durch Trennung der Variablen  $\frac{dS}{dM}$  integrieren.
- d) Skizzieren Sie den Phasenraum. Zeichnen Sie die Nullklinen und die Fixpunkte ein. Warum genügt es, den ersten Quadranten zu betrachten? Zeichnen Sie auch Höhenlinien ein, d.h. Linien konstanten  $c(S, M) = c_0$  ein. Sie können gerne dafür den Computer verwenden. Zum Beispiel kann die Funktion `VectorFieldPlot` verwendet werden, um mit Mathematica Vektorfelder zu plotten. Die Funktion `ContourPlot` hilft bei den Höhenlinien. Die Parameter können Sie zum Beispiel wie folgt wählen:  $\alpha = \beta = 0.01$ ,  $r = 0.1$  und  $q = 0.5$ . Sinnvolle Werte für die Höhenlinien sind dann  $c_0 = -1.3$ ,  $c_0 = -1.4$  und  $c_0 = -1.5$ . Was können Sie nun über den Fixpunkt sagen, den Sie unter c) nicht vollständig bestimmen konnten?
- e) Was passiert, wenn zur Bekämpfung der Läuseplage Insektizide eingesetzt werden? Betrachten Sie dafür ein leicht erweitertes Modell:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= rS - \alpha SM - kS \\ \dot{M} &= -qM + \beta SM - kM\end{aligned}$$

wobei  $k > 0$  die Sterberate der Schildläuse und Marienkäfer bedingt durch den Insektizideinsatz ist. Wie verschieben sich die Fixpunkte? Nehmen Sie  $r > k$  an. Interpretieren Sie das Ergebnis.

**Aufgabe 2 (10 Punkte):** Van-der-Pol-Oszillator

Van der Pol untersuchte in den 30er Jahren einen harmonischen Oszillator mit einem nichtlinearen Dämpfungsterm

$$\ddot{x} + \kappa(x^2 - a)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\kappa \geq 0).$$

Wenn  $a > 0$  ist, verhält sich der Dämpfungsterm für große Amplituden wie eine Reibung, wechselt aber für kleine Amplituden das Vorzeichen und führt so zu Schwingungen mit endlicher Amplitude.

## 1. Übung SS18

1. Schreiben Sie die Gleichung als System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung mit  $y = \dot{x}$  und finden Sie die Fixpunkte und deren Stabilität.
2. Lösen Sie die Gleichungen numerisch für  $\kappa = 1$ ,  $\omega_0 = 1$  und 1000 verschiedenen  $a$  Werten aus  $[-1, 1]$ . Lassen Sie in jeder Simulation eine transiente Zeit verstreichen (ca. 100 Zeiteinheiten) und tragen Sie dann Maxima und Minima von  $x$  über den  $a$  Werten auf, um so ein Bifurkationsdiagramm zu erhalten.  
Plotten Sie ausserdem das Phasen-Portrait in der  $(x, y)$ -Ebene für  $a = 0.1$ ,  $a = 1$ ,  $a = 2$ . Erläutern Sie das Verhalten des Oszillators, wenn  $a$  verändert wird.

**Vorlesung:**

- Dienstag 8:15 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.
- Donnerstag 8:15 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.

**Übung:**

- Montag, 12:15 – 13:45 Uhr im EW 731.

**Anmeldung:** Die Punkteverteilung und Scheinvergabe zu der Vorlesung “Theoretische Physik VI: Nichtlineare Dynamik und Kontrolle” erfolgt über das Moseskontosystem: <https://moseskonto.tu-berlin.de/moseskonto>.

**Webseiten:**

- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter [http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss\\_2018/pflichtveranstaltungen\\_masterstudium/ndk1610/](http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss_2018/pflichtveranstaltungen_masterstudium/ndk1610/)
- Visualisierung gibt es unter: [http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/owl/nichtlineare\\_dynamik](http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/owl/nichtlineare_dynamik)

**Scheinkriterien:**

- Mindestens 50% der Übungspunkte. (Abgabe in Dreiergruppen).
- Bearbeitung und Vorstellung eines Projektes (Projektvorstellung in der letzten Vorlesungswoche).
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in der Übung.

**Kontakte:**

- Prof. Dr. Dr. h.c. Ekehard Schöll, PhD, EW 735, 314-23500, [schoell@physik.tu-berlin.de](mailto:schoell@physik.tu-berlin.de), Sprechzeiten nach Vereinbarung.
- Dr. Anna Zakharova, ER 244, 314-28948, [anna.zakharova@tu-berlin.de](mailto:anna.zakharova@tu-berlin.de), Sprechzeiten Mo. 16:00-17:00