

VL: Prof. Dr. Dr. h.c. Eckehard Schöll, PhD  
UE: Dr. Anna Zakharova

## 5. Übungsblatt zur Nichtlinearen Dynamik und Kontrolle

**Abgabe:** Mo 11.06. 12:15 in der Übung. Die Abgabe erfolgt in **3er Gruppen**.  
Bitte den Source-Code mit ausdrucken.

### Aufgabe 9 (10 Punkte): Euler-Methode für Delay-Differentialgleichungen

In dieser Aufgabe soll die folgende Delay-Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x + \omega y - K [x(t) - x(t - \tau)], \\ \dot{y} &= -\omega x + \lambda y - K [y(t) - y(t - \tau)],\end{aligned}$$

numerisch gelöst werden.

1. Stellen Sie die charakteristische Gleichung auf und zeigen Sie, dass  $K \geq \lambda/2$  eine notwendige Bedingung für die Stabilisierung des Fixpunktes ist.
2. Integrieren Sie das System mit  $\lambda = 0.5$  und  $\omega = \pi$  numerisch und plotten Sie die Trajektorien für  $K = 0$ ,  $K = 0.2$ ,  $K = 0.25$  und  $K = 0.3$ . Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Hinweise zur Numerik:

- Das Euler-Verfahren für eine Delay-Differentialgleichung

$$\dot{X} = f[X(t), X(t - \tau)]$$

ist gegeben durch

$$X_{n+1} = X_n + dt \cdot f[X_n, X_{n-\Delta}],$$

wobei  $\Delta = \tau/dt$ .

- Um den Delay-Term auswerten zu können, muss die Lösung zwischengespeichert werden. Verwenden Sie für die  $x$  und  $y$  Variable jeweils ein history-Array der Länge `delta=int(tau/dt)`. Initialisieren Sie diese Arrays mit Nullen und schreiben Sie in die Arrays dann zyklisch die neuen Werte (d.h.: Wenn Sie am Ende angekommen sind, fangen Sie von vorne an).  
*Tipp:* Verwenden Sie die Modulo-Operation `%`.
- Lassen Sie das System von  $t = 0$  bis  $t = \tau$  ohne Kontrolle ( $K = 0$ ) laufen, um die history-Arrays zu initialisieren, und schalten Sie dann die Kontrolle ein.
- Speichern Sie die berechneten  $x$  und  $y$  Werte in entsprechenden Ausgabearrays und plotten Sie dann die Phasenportraits wie in Fig. 1 aus der VL.

**Bitte Rückseite beachten! →**

5. Übung SS18

**Aufgabe 10 (10 Punkte):** *Optimalkontrolle*

Ein Raum soll von  $0^\circ\text{C}$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  auf ungefähr  $20^\circ\text{C}$  zum Zeitpunkt  $t = t_f$  geheizt werden. Die Änderung der Temperatur  $T$  wird dabei durch die folgende DGL beschrieben

$$\dot{T}(t) = -aT(t) + bu(t), \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (1)$$

wobei  $a$  die Wärmeverlustrate ist und  $u(t)$  die pro Zeiteinheit zugeführte Wärmemenge.

- Finden Sie das optimale  $u_*$ , welches das folgende Kostenfunktional minimiert:

$$\mathcal{I}[T(t), u(t)] = \frac{s}{2}(T(t_f) - 20)^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u(t)^2 dt$$

mit  $s \in \mathbb{R}$  als Fehlertoleranzparameter.

Interpretieren Sie auch die einzelnen Terme von  $\mathcal{I}$ .

- Finden Sie das zu  $u_*(t)$  zugehörige  $T_*(t)$ , das Gl. (1) löst.
- Falls noch nicht erfolgt: Bestimmen Sie auch alle vorkommenden Integrationskonstanten.