

6.4. Elektrischer Widerstand in Relaxations- zeitnäherung

voll Boltzmann gl. ist nur numerisch behandelbar
(3-4 Integrale + Integration in Zeit)

aber El. Ph - Streuung nötig f.
elektrische Widerstand

Idee: Linearisierung $\tilde{\sigma}_k = \tilde{\sigma}_k^0 + \tilde{\sigma}_k^1 \leftarrow$ Störung durch el. Feld (\vec{E})
 $\langle a_k^\dagger a_k \rangle$ \uparrow Gleichgewichtsverteilung (Fermifunktion)

Boltzmann-Anteil zur

Bewegungsgleichung im el. Feld

$$\left. \frac{\partial \tilde{\sigma}_k}{\partial t} \right|_{\text{el-ph}} = - \underbrace{\sum_{\vec{q}} W_{k \rightarrow k+\vec{q}} (1 - \tilde{\sigma}_{k+\vec{q}})}_{\Gamma_{\text{aus}}} \tilde{\sigma}_k$$

$$+ \underbrace{\sum_q W_{k+q \rightarrow k} \Gamma_{k+q} (1 - \Gamma_k)}_{\uparrow \text{ein}}$$

kommt also zusätzlich zum el. Feld.
Anzahl hinzu zu

Annahme zur Lösung:

a) in der Rate W wird die spontane Photonen-
emission weggelassen: $n_q + 1 \approx n_q$
↑ ↑
stimuliert spontane

(für Metalle okay)

$$W_{k+q \rightarrow k} = W_{k \rightarrow k+q} =$$

$$2\pi \sum_{\substack{q \\ \pm -}} |D_q|^2 \delta(\epsilon_{k+q} - \epsilon_k \pm \omega_q) n_q$$

$$\rightarrow \left. \frac{\partial \sigma_k}{\partial t} \right|_{cl-pl} = - \sum_q W_{k \rightarrow k+q} \sigma_k + \sum_q W_{k+q \rightarrow k} \sigma_{k+q}$$

b) Linearisierung $\sigma_k = \sigma_k^0 + \sigma_k^1$

$\sigma_k^1 \sim E$ (lineare Antwort)

Ansatz einsetzen

$$\left. \frac{\partial \sigma_k}{\partial t} \right|_{cl-pl} = - \sum_q W_{k \rightarrow k+q} \sigma_k^0 + \sum_q W_{k+q \rightarrow k} \sigma_{k+q}^0 - \underbrace{\sum_q W_{k \rightarrow k+q} \sigma_k^1}_{ii} + \underbrace{\sum_q W_{k+q \rightarrow k} \sigma_{k+q}^1}_i$$

1. teil stellt stationäre Lsg. der B-Gl dar, also teil = 0

(i) Relaxationsrate approx.:

$$W \approx \text{konstant} \rightarrow \sum_q \sigma_{k+q}^1 = \sum_q \sigma_q^1$$

Wird wieder wenn σ_g ungrade
(wird gerichtet)

$$(ii) - \sum_q W_{k \rightarrow k+q} \sigma_k^1 = -\gamma_k \sigma_k^1$$

$$\gamma_k = \frac{1}{T_k}$$

$$\left. \frac{\partial \sigma_k^1}{\partial t} \right|_{cl. ph} = -\gamma_k \sigma_k^1$$

$\rightarrow e^{-\gamma_k t}$ ist Lösung nach dem

Feld abgeschaltet

Nicht gleich gewicht σ_k^1 zerfällt mit Rate γ_k

" Relaxationsrate näherung

" Relaxationszeit näherung " $T_k = \frac{1}{\gamma_k}$

Gesamtgleichung f. elektr. Transport

$$\left(\partial_t + \frac{q \vec{E}}{\hbar} \cdot \vec{\nabla}_k \right) (\sigma_k^0 + \sigma_k^1) = -\gamma_k \sigma_k^1$$

↑
bekannt

↘
Lineare Antwort

gesucht ist σ_k^1 : $E \sigma^1 \sim E^2 \rightarrow 0$

$$\partial_t \sigma_k^1 = -\frac{q \vec{E}}{\hbar} \cdot \vec{\nabla}_k \sigma_k^0 - \gamma_k \sigma_k^1$$

Ausdehnte von $\vec{E}(t)$ bei $t=0$ ┌ $t=0$

$$\sigma_k^1 = \int_0^t dt' e^{-\gamma_k (t-t')} \left(-\frac{q \vec{E}}{\hbar} \cdot \vec{\nabla}_k \sigma_k^0 \right)$$

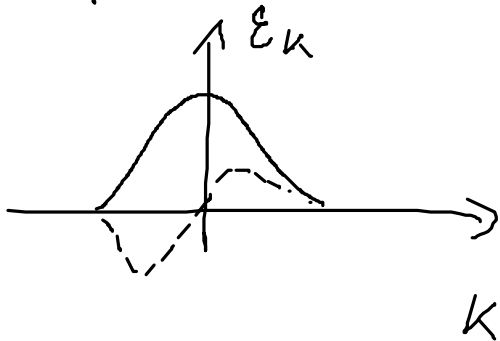
$$= -\frac{q \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_k \sigma_k^0}{\gamma_k \hbar} (1 - e^{-\gamma_k t})$$

→

$$t \rightarrow \infty \quad \sigma_k^1 = -\frac{q \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_k \sigma_k^0}{\gamma_k \hbar} \sim E$$

- stationäres Wert als Gleichgewicht von
 \vec{E} (Beschleunigg.) + f_k (Dämpfung)

- σ_k^{-1} ist proportional zur Verzerrung der
 Termfunktion ($\vec{E} \cdot \vec{\nabla}_k \sigma_k^{-1}$)



Berechn. d. Stroms:

$$\vec{j} = \frac{q}{m^*} \frac{1}{V} \sum_k \underbrace{(\sigma_k^0 + \sigma_k^{-1})}_{\text{antisymm.}} \frac{1}{\hbar} \vec{k}$$

$$= \frac{q}{m^*} \frac{1}{V} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{\hbar} \vec{k} \sigma_k^{-1} \quad q = -e$$

$$\vec{j} = \frac{-e^2}{\hbar m^*} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{\hbar} \vec{k} \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{\nabla}_k \sigma_k^0}_{\text{symm.}} (e_k)$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{\mathbf{k}} &\approx \rho \\
 \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} &= \vec{E} \cdot \frac{\hbar^2 \vec{k}}{m^*} \partial_{\epsilon_{\mathbf{k}}} \sigma_{\mathbf{k}}
 \end{aligned}$$

(parabolisches Band)

Def $\vec{V}_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar \vec{k}}{m^*}$ anwenden

$$\vec{j} = - \frac{e^2}{(2\pi)^3 \rho} \int d^3k \partial_{\epsilon_{\mathbf{k}}} \sigma_{\mathbf{k}} \vec{V}_{\mathbf{k}} (\vec{V}_{\mathbf{k}} \cdot \vec{E})$$

$$\boxed{J_{\alpha} = \sum_{\beta} \sigma_{\alpha\beta} E^{\beta}} \quad \alpha, \beta \text{ kartesische Indices}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = - \frac{e^2}{(2\pi)^3 \rho} \int d^3k \partial_{\epsilon_{\mathbf{k}}} \sigma_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}}^{\alpha} V_{\mathbf{k}}^{\beta}$$

Leitfähigkeitstensor des ohmschen Gesetzes

Bemerkungen:

a) $\sigma \propto \rho$ hat Tensorcharakter
 wird $\delta_{\alpha\beta}$ wenn $\epsilon_k = \epsilon(|\vec{k}|)$,
 dann liegt $\vec{E} \parallel \vec{j}$ vor

$$\vec{j} \approx \sigma \vec{E}$$

b) Drude Modell: Newtongleichung für Elektronen

$$m \dot{v} + m \gamma v = -e E \text{ (Lorentzkraft)}$$

\vec{v}

stationär:
$$v = \frac{-e E}{m \gamma} + j = \frac{e^2 E}{m \gamma} n_{el}$$

γ ist hier unbekannt.

El. Dichte

c) Drude Modell der mikroskop. Theorie:

$$j = \frac{-e^2}{m^* \gamma} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \vec{k} E \cdot \vec{\nabla}_k \sigma_k$$

partielle Integrat.
 liefert Dunkelmodell
 f. parabolische Bandstruktur

hier Zusammenhang zu f :

$$f \approx \sum_g W_{k+g} \rightarrow k = \sum_{\substack{g \\ +, -}} |D_g|^2 n_g \delta(\pm)$$

$f = f(T)$ ist technologisch interessant

$$n_g \approx \frac{1}{e^{\omega_g/kT} - 1} \approx \frac{1}{1 + \frac{\omega_g}{kT} - 1} \sim \frac{kT}{\omega_g}$$

Bose Verteilung

Das Widerstand wächst proportional zu T
 f. hinreichend hohe T .

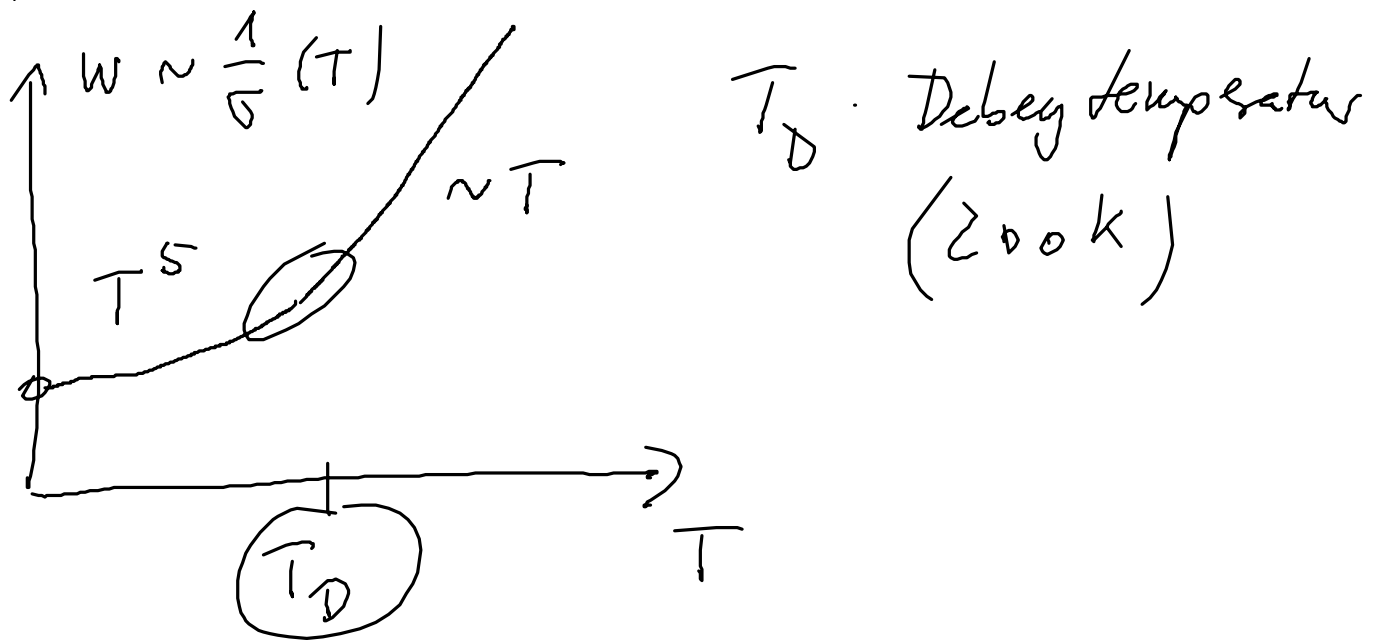
hierfür ist die Relaxationszeitabhängung

aus runden d.

6.5. Temperaturabhängigkeit d.

elektrische Widerstands

experimentell: Bloch - grüneisen Verhalten



- Endlicher Wert: ρ wird durch Störstellen verursacht, kann analog zur el. Ph - Boltzmannvergl. betrachtet werden
- weitere Beitrag $\sim T^2$ (el-el wh)

verbesserte Theorie f. Tieftemperatur -

verhalten :

verbesserte Annahme $W \approx \text{konstante}$

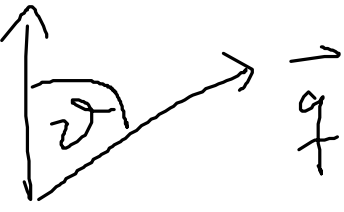
$$\partial_t \sigma_k^1 / |k-p| = - \sum_q W_{k+k+q} (\sigma_k^1 - \sigma_{k+q}^1)$$

wichtig f. T⁵

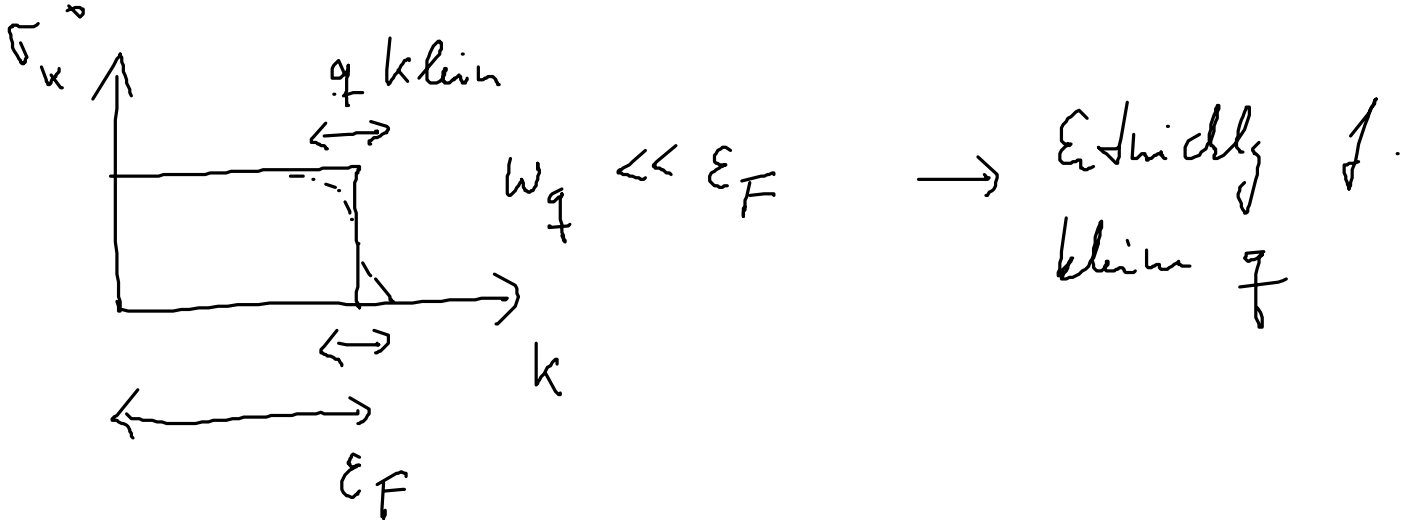
Ansatz: $\sigma_k^1 \sim \alpha \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_k \sigma_k^0$ f. gesamte gl.

isotrop: $\sim \alpha \vec{E} \cdot \vec{e}_k \partial_k \sigma_k^0$

$$\vec{e}_k = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$$

$\vec{e}_z \sim \vec{k}$
 f. q-Integral  \vec{q}
 $\vec{E} = E_z \vec{e}_z$

$$\partial_t \sigma_k^1 / |k-p| \sim - \sum_q W \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{k}}{|\vec{k}|} \partial_k \sigma_k^0 - \frac{\vec{E} \cdot \vec{k+q}}{|\vec{k+q}|} \partial_{k+q} \sigma_{k+q}^0 \right)$$



$$= - \sum_q W \frac{\vec{E} \cdot \vec{q}}{|\vec{k}|} \frac{\partial \sigma_k^0}{\sigma_k^{-1}} \quad \vec{E} \cdot \vec{q} = E_z q \cos \vartheta$$

$$\frac{\partial \sigma_k^{-1}}{\partial t} \Big|_{cl-pl} \sim - \underbrace{\sum_q W_{k \rightarrow k+q} \frac{\cos \vartheta q}{|\vec{k}|}}_{\gamma_k} \sigma_k^{-1}$$

Weitere Näherung:

$$E_k \gg W_q, \quad \text{akustisch Phonon:} \quad |D_q|^2 \sim q$$

$$g_k \sim \int d^3q \underbrace{(|D_q|)^2}_{q} n_q \delta(\epsilon_{k+q} - \epsilon_k \pm \hbar\omega_q) \frac{q}{k} \cos\vartheta$$

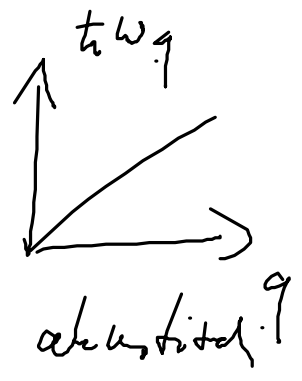
parabolische

$$\sim \int_0^{q_0} dq q^2 \int d\vartheta \sin\vartheta \frac{q}{k} n_q(\vartheta) \delta\left(\frac{q k \cos\vartheta \hbar^2}{m^*} + \frac{\hbar^2 q^2}{2m^*}\right)$$

$$\sim \int_0^{q_0} dq q^2 \int d(\cos\vartheta) \frac{1}{q k} n_q \delta\left(\cos\vartheta + \frac{q}{2k}\right) \frac{q}{k} \cos\vartheta$$

$$\sim \frac{1}{k^3} \int dq q^2 n_q q^2 \sim \int_0^{q_0} dq q^4 n_q(\vartheta)$$

$$n_q = f\left(\frac{\hbar\omega_q}{kT} = \frac{c q}{kT}\right)$$



$$\sim \int_0^{c q_0/kT} dx x^4 n_x \cdot T^5$$

Hohes Temp

$$g_k \sim \int_0^{c q_0/kT} dx x^4 \frac{1}{x} T^5$$

Tiefes T

$$f_k \sim \int_0^{\infty} dx x^4 u_x \quad \underline{\underline{T^5}}$$

$$\sim \underline{\underline{T}}$$

besteht aus J. akust. Phononen das

Block. Grin in Eisen