6.3 Relativist. Hamilton'sches Prinzip

<u>Ziel</u>: Lagrange'sche Feldtheorie

freies Teilchen:

Extremalprinzip $\delta W = 0$, $W \sim \int_1^2 ds$

$ds = \frac{c}{\gamma} dt$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta = \frac{v}{c}$

1, 2 Anf.-, End-Ereignis im 4-Raum $\delta x^i\big|_{1,2} = 0$

Newton'sche Mechanik ist Grenzfall für $\beta \ll 1$:

$$\Rightarrow W = -m_0 c \int_1^2 ds = -m_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} (1-\beta^2)^{1/2} dt$$

$$\approx \int \underbrace{\left(-m_0 c^2 + \frac{m_0}{2} v^2\right)}_{L} dt$$

$$ds = (dx^i dx_i)^{1/2} = c(1-\beta^2)^{1/2} dt = \frac{c}{\gamma} dt$$

$$ds^2 = dx^i dx_i \,, \quad ds^2 = (c\,dt)^2 - d\underline{x}^2 = dt^2\left(c^2 - \left(\frac{d\underline{x}}{dt}\right)^2\right)$$

WW eines Massenpunktes mit einem 4-Vektor-Feld φ^i

$$\boxed{W = \int_1^2 \{\underbrace{-m_0 c\, ds}_{} - \underbrace{\varphi^i dx_i}_{}\}}$$

Lorentz-Invarianten

Variation:

$$\delta W = \int_1^2 \left\{ -m_0 c\, \delta(ds) - \delta(\varphi^i dx_i) \right\}$$

mit $\delta ds = \delta (dx^i dx_i)^{1/2} = \frac{1}{2} \frac{(d\delta x^i) dx_i + dx^i d(\delta x_i)}{ds}$

$$(d\delta x^i) dx_i = dx^i (d\delta x_i)$$

$$= \frac{dx^i}{ds} d(\delta x_i) = u^i d\delta x_i$$

und $\delta(\varphi^i dx_i) = \delta\varphi^i dx_i + \varphi^i d(\delta x_i)$

$$\Rightarrow \delta W = \int_1^2 \left\{ -m_0 c u^i d(\delta x_i) - \delta\varphi^i dx_i - \varphi^i d(\delta x_i) \right\}$$

$$\underbrace{-\left[m_0 c u^i \delta x_i\right]_1^2}_{0 \text{ weil } \delta x_i|_{1,2} = 0} + \int_1^2 m_0 c\, du^i \delta x_i \qquad \underbrace{-\left[\varphi^i \delta x_i\right]_1^2}_{0} + \int_1^2 d\varphi^i \delta x_i$$

$$\int_1^2 m_0 c\, du^i \delta x_i = \int_1^2 ds\, m_0 c \frac{du^i}{ds} \delta x_i$$

$$d\varphi^i = \partial^k \varphi^i dx_k = \partial^k \varphi^i u_k ds$$

$$\delta\varphi^i = \partial^k \varphi^i \delta x_k$$

$$\delta\varphi^i dx_i = \partial^k \varphi^i \delta x_k dx_i \overset{i \leftrightarrow k}{=} \partial^i \varphi^k \delta x_i dx_k = \partial^i \varphi^k u_k \delta x_i ds$$

$$\Rightarrow \delta W = \int_1^2 ds \left\{ m_0 c \frac{du^i}{ds} - (\partial^i \varphi^k - \partial^k \varphi^i) u_k \right\} \delta x_i \overset{!}{=} 0$$

da $\delta W = 0$ für beliebige δx_i gilt, folgt:

$$\boxed{m_0 c \frac{du^i}{ds} = f^{ik} u_k} \quad \text{mit} \quad \boxed{f^{ik} = \partial^i \varphi^k - \partial^k \varphi^i}$$

relativist. Bewegungsgl. eines Massenpkt.s der Ruhmasse m_0, Ladung q unter dem Einfluss der Lorentzkraft:

$$p^i = m_0 c u^i$$

$$f^{ik} = \frac{q}{c} F^{ik} = \frac{q}{c}\left(\partial^i \phi^k - \partial^k \phi^i\right)$$

$$\varphi^i = \frac{q}{c} \phi^i$$

$$\boxed{\frac{d}{ds} p^i = \frac{q}{c} F^{ik} u_k} \iff \boxed{\delta W = \delta \int_1^2 \left\{ -m_0 c\, ds - \frac{q}{c} \phi^i dx_i = 0 \right.}$$

$$L_{Feld}\, dt = \left(-q\phi - q \underline{v} \cdot \underline{A}\right) dt = -\frac{q}{c} \phi^i dx_i$$

Ortskomp. $\alpha = 1, 2, 3$:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \underline{p} = q\left(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}\right)}$$

$$u^0 = \gamma$$
$$u^\alpha = \frac{\gamma}{c} v^\alpha$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} p^1 &= q\left(E^1 + v^2 B^3 - v^3 B^2\right) \\
&= q\left(F^{10} + F^{21} \frac{1}{c} v^2 - F^{13} \frac{1}{c} v^3\right) \\
&= \frac{q}{\gamma}\left(F^{10} \gamma - F^{12} \underbrace{\frac{\gamma}{c} v^2}_{u^2} - F^{13} \underbrace{\frac{\gamma}{c} v^3}_{u^3}\right) \\
&= \frac{q}{\gamma} F^{1k} u_k
\end{aligned}$$

also mit $ds = \frac{c}{\gamma} dt$:

$$\frac{d}{ds} p^i = \frac{q}{c} F^{ik} u_k$$

Die zeitartige Komp. $i=0$ gibt wegen $p^0 = \frac{E}{c}$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{E}{c}\right) = \frac{\gamma}{c^2} \frac{dE}{dt} = \frac{q}{c}\left(F^{01} u_1 + F^{02} u_2 + F^{03} u_3\right)$$

$$= q \frac{\gamma}{c^2}\left(-E^1 v_1 - E^2 v_2 - E^3 v_3\right)$$

$$= q \frac{\gamma}{c^2}\left(E^1 v^1 + E^2 v^2 + E^3 v^3\right)$$

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = q\, \underline{E} \cdot \underline{v}}$$ Leistungsbilanz

6.4 Eichinvarianz und Ladungserhaltung

Wirk. integral $W = \underbrace{- m_0 c \int_1^2 ds}_{W_t} \underbrace{- \frac{q}{c} \int_1^2 dx_i \phi^i}_{W_{tf}}$

(Teilchen) (Teilchen-Feld)

Verallg. auf kontin. Massendichten $\mu(x^i)$

$$\boxed{W_t = -c \int d^3r\, \mu \int_1^2 ds = - \int_\Omega d\Omega\, \mu \frac{ds}{dt}}$$

mit $d\Omega := d^3r\, c\,dt = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ Volumenelement im Minkowski-Raum

(i) $d\Omega$ ist eine Lorentz-Invar., da das Vol. unter orthogonaler Trafos $U^i{}_k$ erhalten wird.

(ii) Aus $dm_0 dx^i = \frac{\mu}{c}\frac{dx^i}{dt} d^3r\, c\, dt = \frac{1}{c}\underbrace{\mu \frac{dx^i}{dt}} d\Omega$

folgt, dass die 4-Massenstromdichte

$\mu \frac{dx^i}{dt} \equiv g^i$ ein 4-Vektor ist, da

dm_0, $d\Omega$ Lorentz-Skalare sind

(iii) $\underbrace{\mu^2 \frac{dx^i dx_i}{(dt)^2}}_{g^i g_i} = \left(\mu \frac{ds}{dt}\right)^2$ ist Lorentz-Invar.

also auch $\mu \frac{ds}{dt}$

$\Rightarrow W_t$ ist Lorentz-Invariante.

WW einer kontin. Ladungsdichte $\rho(x^i)$ mit Feld:

$$W_{tf} = -\frac{1}{c}\int d^3r\, \rho \int dx_i \phi^i$$

$$= -\frac{1}{c^2}\int \underbrace{d^3r\, c\, dt}_{d\Omega}\, \underbrace{\rho \frac{dx_i}{dt}}_{j_i} \phi^i$$

mit der 4-Ladungsstromdichte j_i $\begin{pmatrix} j^0 := \rho \frac{dx^0}{dt} = c\rho \\ j^\alpha := \rho v^\alpha \end{pmatrix}$

$$\boxed{W_{tf} = -\frac{1}{c^2}\int_\Omega d\Omega\, j_i \phi^i}$$

Also $W = \int_\Omega d\Omega\, \mathcal{L}(x^i)$

mit der Lagrange-Dichte $\mathcal{L} := -\mu \frac{ds}{dt} - \frac{1}{c^2} j_i \phi^i$

$d\Omega \equiv d^4x$