10. Formale Grundlagen der QT

· zurück zur Physik

10.1. Die Axiome der QT

· Formulierung mit Ket-Vektoren → Blatt

10.2. Vollständiger Satz kommutierender Observabler

· Motivation: Klass. Mechanik: Observable $\underline{r}, \underline{p}$ bestimmen Zustand!

QT: $|\psi\rangle$ bestimmt " !

eindeutige Präparation eines $|\psi\rangle$?

· Idee: Messe Observable $A \longrightarrow |\psi\rangle = |a_n\rangle$ ... EV von A zu EW a_n

Fall 1: a_n ... nichtentarteter EW

$\longrightarrow |\psi\rangle = |a_n\rangle$ eindeutig beschrieben durch Quantenzahl a_n

Fall 2: a_n ... g-fach entarteter EW mit EV $|a_n^{(i)}\rangle$, $i = 1, \dots, g$

weitere Info nötig

· Vorgehen: Suche Observable B mit $[A, B] = 0$

(i) Satz: $\boxed{\text{Gilt } A|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle \text{ dann } AB|a_n\rangle = a_n B|a_n\rangle}$ (10.1)

Beweis: $AB|a_n\rangle = BA|a_n\rangle = a_n B|a_n\rangle$ qed

(ii) Fall 1: a_n nicht entartet: $\longrightarrow B|a_n\rangle = b|a_n\rangle$

$\longrightarrow$ $|a_n\rangle$ auch EV zu B!

(iii) Fall 2: a_n entartet $\longrightarrow$ $B|a_n\rangle = \sum_{i=1}^{g} b_i \underbrace{|a_n^{(i)}\rangle}$ (... Entwicklung

spannen Entartungsraum $\mathcal{H}_n$ zu EW a_n auf!

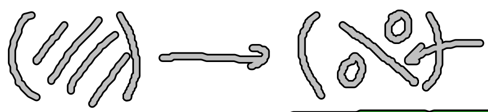
(1) insbesondere gilt: $\langle a_m | B a_n\rangle = 0$, für $a_m \neq a_n$

$\underline{\underline{B}} =$ 

(2) Stelle „Teil von B" im Entartungsraum $\mathcal{H}_n = \{|a_n^{(1)}\rangle \dots |a_n^{(g)}\rangle\}$ dar,

$$B_{ij} = \langle a_n^{(i)} | B | a_n^{(j)}\rangle$$

und diagonalisiere = suche EV zu B

also:  EW von B

$\longrightarrow$ Satz: $\boxed{\text{Zu kommutierende } A, B \text{ existiert immer ein VONS, dessen Vektoren zugleich EV von } A, B \text{ sind}}$ (10.2)

(3) falls $g > 2$ (g... Dimension des Entartungsraumes), suche weitere $C, D, \dots$, die mit A, B kommutieren

$\longrightarrow$ Satz: Ein vollständiger Satz kommutierender Observablen $A, B, C, \dots$ besitzt ein VONS von EV $|abc\dots\rangle$, die eindeutig durch den Satz von Quantenzahlen = EW $(a, b, c, \dots)$ charakterisiert sind. (10.3)

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{Präpariere } |abc\ldots\rangle \text{ durch Messung von } A, B, C, \ldots}$ (10.4)

- Bezeichnung:

  (i) reiner Zustand: $|\psi\rangle$

  (ii) Mischzustand: besteht aus $|\psi_1\rangle$ mit Wahrscheinl. w_1

  $\vdots$

  $|\psi_n\rangle$ " " w_n

  $\hat{=}$ unvollständige Info!

10.3. Schrödingerbild

- Zeitentwicklung des Zustandes $|\psi(t)\rangle$:

SG: $\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle}$ (10.5)

- formale Lsg:

$$\boxed{\begin{aligned} &|\psi(t)\rangle = \underbrace{U(t,t_0)}_{\text{Zeitentwicklungsoperator, unitär}} |\psi(t_0)\rangle \\ &\text{mit } \quad i\hbar \frac{d}{dt} U(t,t_0) = H(t) U(t,t_0) \\ &\text{und } \quad U^+(t,t_0) = U^{-1}(t,t_0) \end{aligned}} \quad (10.6)$$

Beweis: (i) $U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$ in SG (10.5)

$\longrightarrow \left(i\hbar \frac{d}{dt} U\right) |\psi(t_0)\rangle = H U \underbrace{|\psi(t_0)\rangle}_{\text{beliebig}}$

(ii) Normierung!

$1 = \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle U\psi(t_0) | U\psi(t_0) \rangle = \langle \psi(t_0) | U^+ U \psi(t_0) \rangle$

$\stackrel{!}{=} \langle \psi(t_0) | \psi(t_0) \rangle = 1$

$\rightarrow U^+U = 1$ qed

$$\boxed{U(t,t_0) \ldots \text{ beschreibt Rotation im Raum der Ket-Vektoren}} \quad (10.7)$$

- infinitesimale Zeittranslation: $U(t,t) = 1$

(10.6) $\quad dU(t+dt,t) = -\frac{i}{\hbar} H(t)\, dt$

$$\longrightarrow \boxed{U(t+dt,t) = 1 - \frac{i}{\hbar} H(t)\, dt} \quad (10.8)$$

unitär! $\quad U(t+dt,t)\, U^+(t+dt,t) = \left(1 - \frac{i}{\hbar} H\, dt\right)\left(1 + \frac{i}{\hbar} H\, dt\right)$

$$= 1 + O(dt^2) \quad \text{qed}$$

- zeitunabh. H:

Lsg. von (10.6):
$$\boxed{U(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H (t-t_0)}} \quad (10.9)$$

NB: (10.9) gilt nicht für $[H(t_1), H(t_2)] \neq 0$

- <u>Darstellungen:</u>

(i) Ortsdarstellung $\quad \langle r |$ (10.5)

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\underline{r},t) &= \langle \underline{r} | H \psi(t) \rangle \\ &\overset{(3.54)}{=} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 + V(\underline{r})\right] \psi(\underline{r},t) \end{aligned}} \quad (10.10)$$

(ii) Impulsdarstellung: $\quad \langle p |$ (10.5)

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \overline{\psi}(\underline{p},t) &= \langle \underline{p} | H \psi(t) \rangle \\ &\overset{(3.57)}{=} \frac{\underline{p}^2}{2m} \overline{\psi}(\underline{p}) + \int d^3p'\, \overline{V}(\underline{p}-\underline{p}')\, \overline{\psi}(\underline{p}') \end{aligned}} \quad (10.11)$$

(iii) diskretes VONS: $\quad \{\ldots |\varphi_n\rangle \ldots\}$: $\quad \langle \varphi_n | \psi \rangle = c_n$ & $\langle \varphi_n |$ (10.5)

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c_n(t) &= \langle \varphi_n | H \psi \rangle \\ &\overset{(8.52)}{=} \sum_m H_{nm} c_m(t) \end{aligned}} \quad (10.12)$$

(iv) VONS der Energie-EV: $H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$

$\longrightarrow H_{nm} = \delta_{nm} E_n$!

$$\boxed{\begin{aligned} &i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c_n = E_n c_n(t) \\ &\longleftrightarrow \quad c_n(t) = c_n(0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \end{aligned}} \quad (10.13)$$

10.4 Heisenbergbild

- QT: Meßgrößen: EW a_n von A

$$\langle A\rangle = \sum_n a_n |c_n(t)|^2$$

Zustand des Systems: $|\psi(t_0)\rangle$

- Dynamik: SG: $|\psi(t_0)\rangle \longrightarrow |\psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$ vgl. (10.5)

- Heisenberg: Stecke Dynamik in A (10.14)

lege fest:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Zustand des Systems:} \quad |\psi_H\rangle = |\psi(t_0)\rangle \\ &\text{Dynamik:} \quad A_H(t) = U^+(t,t_0)\,A\,U(t,t_0) \end{aligned}}$$

... Heisenbergbild (Index H)

Konsistent? (i) $\boxed{\text{EW-Spektrum von } A_H(t) \text{ und } A \text{ sind identisch}}$ (10.15)

Beh: $A_H(t)\, U^+|a_n\rangle = a_n\, U^+|a_n\rangle$

Bew: $= U^+ A \underbrace{U\, U^+}_{=1}|a_n\rangle = U^+ a_n |a_n\rangle$ qed

(ii) $\boxed{\langle A\rangle = \langle A_H\rangle}$ (10.16)

Bew: $\langle A_H\rangle = \langle\psi_H|A_H|\psi_H\rangle = \langle\psi(t_0)|U^+AU|\psi(t_0)\rangle$

$= \langle U\psi(t_0)|A\, U\psi(t_0)\rangle$

$= \langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle$ qed