10.4. Heisenbergbild

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Zustand des Systems:} & |\psi_H\rangle = |\psi(t_0)\rangle \\ \text{Dynamik " " :} & A_H(t) = U^+(t,t_0)\,A\,U(t,t_0) \end{array}} \quad (10.14)$$

[$U(t,t_0)$ ... Zeitentwicklungsoperator des Schrödingerbildes:
$|\psi(t)\rangle = U(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle$!!]

$$(10.14) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \text{(i)} & \text{EW-Spektrum von } A_H(t) \text{ und } A \text{ sind identisch} \quad (10.15) \\ \text{(ii)} & \langle A\rangle = \langle A_H\rangle \quad (10.16) \end{array}}$$

$\longrightarrow$ „meßbare Physik ist dieselbe"

- Bewgl. für $A_H(t)$:

$$\frac{dA_H}{dt} \overset{(10.14)}{=} \left(\frac{d}{dt}U^+\right)AU + U^+A\left(\frac{d}{dt}U\right) + U^+\frac{\partial A}{\partial t}U$$

$$\xrightarrow[-i\hbar\frac{d}{dt}U^+ = U^+H]{i\hbar\frac{d}{dt}U = HU} \quad i\hbar\frac{dA_H}{dt} = -U^+H\underbrace{}_{1=UU^+}AU + U^+A\underbrace{}_{1=UU^+}HU + i\hbar\, U^+\frac{\partial A}{\partial t}U$$

<u>Def.</u>

$$\boxed{H_H = U^+HU \quad , \quad \frac{\partial A_H}{\partial t} := U^+\frac{\partial A}{\partial t}U} \quad (10.17)$$

$$\longrightarrow \quad i\hbar\frac{dA_H}{dt} = -H_HA_H + A_HH_H + i\hbar\frac{\partial A_H}{\partial t}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{i\hbar\frac{dA_H}{dt} = [A_H, H_H] + i\hbar\frac{\partial A_H}{\partial t}} \quad (10.18)$$

- Korrespondenzprinzip: $A_H \longrightarrow A_K(x,p,t)$ ... klass. Observable

$\frac{1}{i\hbar}[\,,\,] \longrightarrow \{\ldots\}$ ... Poissonklammer

(10.18) $\longrightarrow$ $$\boxed{\frac{dA_k}{dt} = \{A_k, H\} + \frac{\partial A_k}{\partial t}} \quad (10.19)$$

... Bewgl. für $A_k(r, p, t)$ [vgl. Mechanik]

- Darstellung von (10.18) in diskretem VONS: $A_H \longrightarrow A^H_{nm}(t)$

$H_H \longrightarrow \underbrace{H^H_{nm}(t)}_{\text{Matrizen}}$

(10.18) $\longrightarrow$ $$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt} A^H_{nm} = [A_H, H_H]_{nm} + i\hbar \frac{\partial A^H_{nm}}{\partial t}}$$

$A^H_{nl} H^H_{lm} - H^H_{nl} A^H_{lm}$

... Heisenbergsche Matrizenmechanik
[EW der A^H_{nm} sind Meßgrößen!]

- Konstanten der Bewegung:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} [A_H, H_H] = 0 \\ \frac{\partial A_H}{\partial t} = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow A_H = \text{konstant}} \quad (10.21)$$

Bsp: Energieerhaltung: $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \longrightarrow U(t, t_0) \overset{(10.9)}{=} e^{-\frac{i}{\hbar} H (t - t_0)}$

$\longrightarrow H_H = H$!

- Wechselwirkungsbild (Dirac):

oft: $H = \underbrace{H_0}_{\text{ungestörten Hamiltonian}} + \underbrace{\Delta H(t)}_{\text{„Störhamiltonian"}}$

Behandle im S-Bild H-Bild [$\Rightarrow$ Zugang zu einer zeitabh. Störungstheorie]

III. Anwendungen der Quantentheorie

11. Der Drehimpuls in der QT

- klass. Mechanik: $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$

$\underline{L}$ = konstant für Zentralkräfte $\longrightarrow$ Bewegung in Ebene $\perp \underline{L}$

• QT: (i) $\underline{L}$ als Observable: löse EW-Problem

(ii) wichtig für radial symmetr. Probleme in 3D: bestimmt/charakt. Zustände   Bsp: H-Atom

(iii) Zugang zu Spin = Eigendrehimpuls des e^-

11.1 Definition, Vertauschungsrelationen und Verallgemeinerung

• Definition: (ohne ^ !)

Drehimpulsoperator: (= Vektoroperator)

Ortsraum

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p} = \frac{\hbar}{i}\, \underline{r} \times \underline{\nabla}, \quad L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k && (11.1)\\ &L_i = L_i^+ \quad (\text{da } \underline{r} = \underline{r}^+,\ \underline{p} = \underline{p}^+) && (11.2)\\ &\underline{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \quad \text{„Quadrat von } \underline{L}\text{"} && (11.3) \end{aligned}}$$

• Vertauschungsrelationen:

$$[x_i, p_j] = i\hbar\, \delta_{ij} \xrightarrow[\text{„nachrechnen"}]{\text{o.B.}} \boxed{\begin{aligned} &[L_i, L_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} L_k && (11.4)\\ &[\underline{L}^2, L_i] = 0, \quad i = 1,2,3 \ (x,y,z) && (11.5) \end{aligned}}$$

außerdem:

$$\boxed{\begin{aligned} &[L_i, x_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} x_k && (11.6)\\ &[L_i, p_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} p_k && (11.7) \end{aligned}}$$

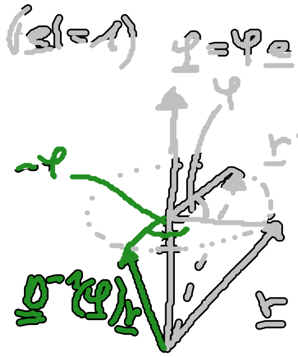
<u>Bem</u>: (i) (11.5) $\longrightarrow$ $\underline{L}^2$ und <u>ein</u> L_i haben gemeinsames VONS von EV

(ii) (11.4) $\longrightarrow$ L_i <u>nicht</u> gleichzeitig scharf meßbar

(iii) (11.4), (11.6/7) gleiche Struktur $\longrightarrow$ s. a)

a) $\underline{L}$ generiert Drehungen im Ortsraum:

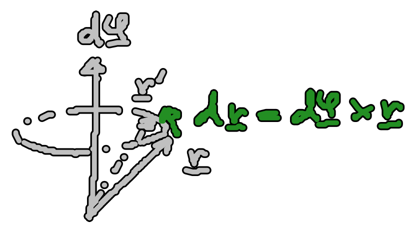
- Drehe $\psi(\underline{r}) = \langle \underline{r} | \psi \rangle$ um $\underline{\varphi} = \varphi\, \underline{e}$ $(|\underline{e}|=1)$



Matrix: $\underline{\underline{D}}(\varphi) \in SO(3)$

$$\longrightarrow \boxed{\psi'(\underline{r}) = \psi(\underbrace{\underline{\underline{D}}^{-1}(\varphi)\,\underline{r}}_{\text{gibt bei Rotation um } \underline{\varphi} \text{ gerade } \underline{r}})}$$

- kleines $\underline{\varphi} = d\underline{\varphi}$, $|d\underline{\varphi}| \ll 1$



$$\underline{r}' = \underline{r} + \underbrace{d\underline{\varphi}\times\underline{r}}_{d\underline{r} \perp \underline{r}} = (1 + d\underline{\varphi}\times)\,\underline{r}$$

bzw.: $\underline{r} = \underbrace{(1 - d\underline{\varphi}\times)}_{\underline{\underline{D}}^{-1}(d\underline{\varphi})}\,\underline{r}'$ (Rotation mit $-d\underline{\varphi}$!)

damit: $\psi'(\underline{r}) = \psi((1-d\underline{\varphi}\times)\underline{r}) \approx \psi(\underline{r}) - (d\underline{\varphi}\times\underline{r})\cdot\underline{\nabla}\psi$

$$= \psi(\underline{r}) - d\underline{\varphi}\cdot\underbrace{(\underline{r}\times\underline{\nabla})}_{\frac{i}{\hbar}\underline{L}}\psi \quad [\text{s. } 11.1]$$

$$\longrightarrow \boxed{\psi'(\underline{r}) = \underbrace{U(d\underline{\varphi})}_{\text{Operator!}}\,\psi(\underline{r}) = \left(1 - \frac{i}{\hbar}\, d\underline{\varphi}\cdot\underline{L}\right)\psi(\underline{r})} \quad (11.9)$$

- beliebige Rotation: $\underline{\varphi} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\underline{\varphi}}{n}\right)^n$

also: $U(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \left[U\left(\frac{\underline{\varphi}}{n}\right)\right]^n \overset{(11.9)}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{i}{\hbar}\frac{\underline{\varphi}}{n}\cdot\underline{L}\right)^n$

$\left[e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right] \longrightarrow \boxed{U(\underline{\varphi}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{\varphi}\cdot\underline{L}}}$ (11.10)

... Rotationsoperator (darstellungsfrei)

Bem: (i) „$\mathbf{L}$ generiert Drehung": $\boxed{|\psi'\rangle = U|\psi\rangle}$ (11.11)

(ii) unitärer Operator:

$$\boxed{U^+(\boldsymbol{\varphi}) \underset{\substack{\mathbf{L} = \mathbf{L}^+ \\ (-i)^+ = i}}{=} e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{L}} \underset{\text{inverse } \boldsymbol{\varphi}:\, -\boldsymbol{\varphi}}{=} U(-\boldsymbol{\varphi}) = U^{-1}(\boldsymbol{\varphi})} \quad (11.12)$$

(iii) erhält Norm von $|\psi\rangle$:

$$\langle U\psi | U\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle \qquad U^+ = U^{-1}$$

• Rotation von Operator A:

$$U(\boldsymbol{\varphi})A|\psi\rangle = U(\boldsymbol{\varphi})A\underbrace{U^+(\boldsymbol{\varphi})U(\boldsymbol{\varphi})}_{1}\,|\psi\rangle \overset{!}{=} A'|\psi'\rangle$$

with $U(\boldsymbol{\varphi})|\psi\rangle = |\psi'\rangle$.

$$\longrightarrow \quad \boxed{A' = U(\boldsymbol{\varphi})AU^+(\boldsymbol{\varphi})} \quad (11.13)$$

• Folgerungen: mit $\boldsymbol{\varphi} = d\boldsymbol{\varphi}$, $|d\boldsymbol{\varphi}| \ll 1$: $U(\boldsymbol{\varphi}) \underset{(11.3)}{\approx} 1 - \frac{i}{\hbar}d\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{L}$

$$A' = \left(1 - \frac{i}{\hbar}d\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{L}\right)A\left(1 + \frac{i}{\hbar}d\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{L}\right)$$

$$= A - \frac{i}{\hbar}d\varphi_j L_j A + A\frac{i}{\hbar}d\varphi_j L_j + O(d\varphi^2)$$

$$\boxed{A' = A - \frac{i}{\hbar}d\varphi_j\,[L_j, A]} \quad (11.14)$$

Bem (i) „drehinvariante Operatoren":

$$A' = A\,, \quad \text{falls} \quad \boxed{[L_j, A] = 0} \quad (11.15)$$

$\longrightarrow$ L_j, A haben gemeinsames VONS von EV !!

Bsp: $A = \underbrace{\mathbf{L}^2,\ \mathbf{p}^2,\ \mathbf{r}^2,\ H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(|\mathbf{r}|)}_{\text{„Beträge ändern sich nicht bei Rotation"}}$

(ii) Vektoroperator $\underline{V}$:

$$\underline{V}' = \underline{V} - d\underline{\varphi} \times \underline{V}$$ ... Rotation von Vektor um $-d\underline{\varphi}$

bzw $$V_k' = V_k - \overbrace{\varepsilon_{kjl}}^{-\varepsilon_{jkl}} d\varphi_j V_l \overset{!}{\underset{(11.14)}{=}} V_k - \frac{i}{\hbar} d\varphi_j [L_j, V_k]$$

$$\boxed{[L_j, V_k] = i\hbar\, \varepsilon_{jkl} V_l} \quad (11.16)$$

... Beweis von (11.4)(11.6/7) für $V_k = L_k, x_k, p_k$