

1d Ising Modell



geschlossene Kette: $S_{N+1} = S_1$

$$H = -J \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1} - h \sum_{i=1}^N S_i$$

nur nächste Nachbarn wechselwirkt!

$$Z_N = \sum_{\{S\}} e^{-\beta H} = \dots = \underline{\underline{T}} \underline{\underline{V}}^N \quad \text{mit } \underline{\underline{V}} \text{ Transformatrix } (2 \times 2)$$

$$= \lambda_1^N + \lambda_2^N$$

$$\text{mit } \lambda_{1,2} = e^{\beta J} \cosh(\beta h) \pm \sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2(\beta h) + e^{-2\beta J}}$$

Eigenwerte von $\underline{\underline{V}}$

Freie Energie

$$F = -k_B T \ln Z_N$$

$$= -k_B T \ln (\lambda_1^N + \lambda_2^N)$$

$$= -k_B T \ln \left(\lambda_1^N \left(1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^N \right) \right)$$

$$= -k_B T \ln \lambda_1^N - k_B T \ln \left(1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^N \right)$$

$$\lambda_2 : \text{Eigenwert mit } \begin{matrix} \text{"-"} \\ \text{"+"} \end{matrix} \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$$

$$\lambda_1 :$$

N groß (thermodynamische Grenze) : $\left(\frac{1}{T_1}\right)^N \rightarrow 0$!
 $N \rightarrow \infty$

Unter dieser Annahme gibt also
 $f = \frac{F}{N} = -k_B T \ln z_1$

$$\Rightarrow f = -k_B T \ln \left(e^{\beta J} \cosh(\beta h) + \sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2(\beta h) + e^{-2\beta J}} \right)$$

$$= f(h, T)$$

Magnetisierung:

$$m = \langle S \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle S_i \rangle$$

$$= \frac{1}{N} \frac{1}{Z_N} \sum_{\{S_i\}} e^{-\beta H} \sum_{i=1}^N S_i$$

$$= \frac{1}{N} \frac{1}{Z_N} \frac{\partial}{\partial h} Z_N \cdot k_B T = \frac{k_B T}{N} \frac{\partial \ln Z_N}{\partial h}$$

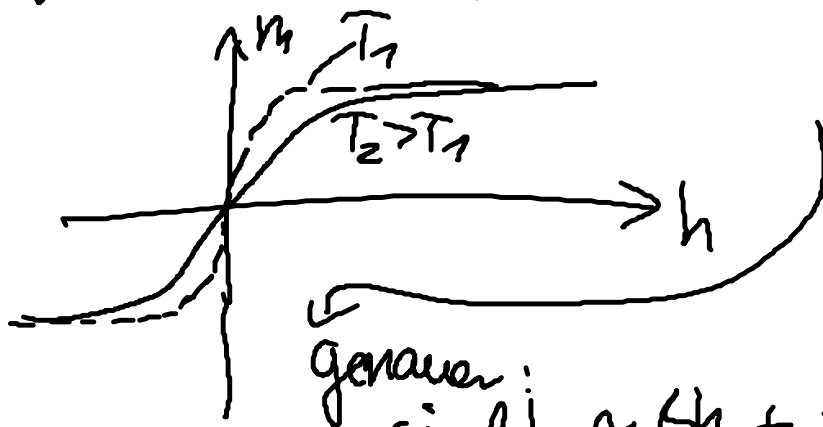
$$= -\frac{\partial}{\partial h} f(h, T)$$

$$H = -J \sum_i S_i S_{i+1} - h \sum_i S_i$$

man erhält

$$m(h, T) = \frac{e^{\beta J} \sinh(\beta h)}{\sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2(\beta h) + e^{-2\beta J}}}$$

Gibt es eine spontane Magnetisierung in 1 Dimension?



man sieht schon:
Magnetisierung verschwindet
für $h \rightarrow 0$

genauer:

$$\sin(\beta h) \approx \beta h + \frac{1}{3!} (\beta h)^3$$

$$\rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} m(h, T) \equiv 0 \text{ für alle } T > 0$$

\Rightarrow es gibt keinen Ferromagnetismus
für endliche Temperaturen ($T > 0$)
 $\Leftrightarrow \beta < \infty$

↳ Unterschied zu MF-Theorie!

↳ erzeugt Ferromagnetismus
bei einem $T_c > 0$

unabhängig von der Raumdimension

\Rightarrow "Vorsicht" mit Anwendung von MF-artiger Theorie
in reduzierten Raumdimensionen!

andererseits:
betrachte Magnetisierung m im Feld für $T \rightarrow 0 \Leftrightarrow \beta \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow e^{-\beta h} \rightarrow 0$$

$$m(h, T \rightarrow 0) \approx \frac{e^{\beta J} \sinh \beta h}{\sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2 \beta h}}$$

$$= 1 \quad \text{endlich, große Konstante, unabhängig von Feld!}$$

\Rightarrow Gilt auch speziell für $h \rightarrow 0$!

(Sng-Modell in 1 Dimension "hat Phasenübergang"
bei $T=0$! (Zeitferromagnetismus))

$$H = -J \sum_i S_i S_{i+1}$$

endliche Temperatur: System minimiert $\bar{F} = E - TS$

"Argument von Kny and Ma"

\rightarrow Abwesenheit von Phasenübergang
in 1d !

$T > 0$: Entropiegewinn durch Unordnung der Spins ~~ist~~ wiegt immer schwerer als Energieabsenkung durch Parallelisierung der Spins

$T = 0$: Es zählt nur die Energie
 \rightarrow Spins ordnet sich!

Thermischer Übergang für $T \rightarrow 0$ sieht man auch in der Kondensationslänge!

3d z.B. reales Gas

$$h(n) \sim \langle \rho(r) \rho(r') \rangle - \langle \rho \rangle^2 \quad \text{ähnliche Dichte = Dichte Kondensat}$$

$$\sim \frac{e^{-N/\xi}}{r}$$

Ordnung-Zerfall
 Verhalten (gilt für
 große N ,
 dicht an T_c !)

$$\sim e^{-N/\xi}$$

Kondensationslänge

analoges Verhalten findet man in Spinsystemen!

für 1d Ising-Modell

$$g_{ij} = \langle S_i, S_j \rangle - \underbrace{\langle S_i \rangle \langle S_j \rangle}_{n^2}$$

definiere $N = |N_i - N_j|$

Translation invariant

$$g_{ij} = g(N)$$

man findet (\rightarrow Übung)

$$g_{ij} \sim \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^N \quad \lambda_{2,1} \text{ sind Eigenwerte von } \underline{L}$$

$$= e^{N \ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)} = e^{N \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = e^{-N \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$$

definiere also Konstante γ

$$\gamma = \frac{1}{\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$$

$$g_{ij} \sim e^{-N/\gamma}$$

betrachte den Fall $h=0$: $\lambda_{1,2} = e^{\pm \beta J}$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{e^{\beta J} + e^{-\beta J}}{e^{\beta J} - e^{-\beta J}} = \frac{e^{\beta J} (1 + e^{-2\beta J})}{e^{\beta J} (1 - e^{-2\beta J})}$$

Betrachte $T \rightarrow 0 \Leftrightarrow |J| \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{J_1}{J_2} \rightarrow 1$!

$\Rightarrow J \rightarrow \infty$ genau, wie man es erwartet!

Reichweite der räuml.
Spin-Spin-Korrelationsfunktion
divergiert!

III.7. Landau-Theorie von Phasenübergang (PÜ)

Grundidee:

In der Nähe von PÜ's zitiert oder erster Ordnung kann man die freie Energie in Potenzen des Ordnungsparameters entwickeln!
(da klein ist)

Beachte dabei "Symmetrien" des Systems!

Beispiel Ferromagnetismus, Ising-Modell

$$F(-m) = F(m)$$

Wir hatten bereits Beispiele für Landau-artige Entwicklungen
hermingleitet!

• Ising-Modell
 1D Reichweite $\frac{F}{N} \approx \frac{(\beta J)^2}{2} m^2 (1 - (\beta J)^2) + \frac{1}{8} (\beta J)^4 m^4 - k_B T \ln 2$

• Van-der-Waals Gas: $\Delta \tilde{p} = \frac{p - p_c}{p_c} = 4 \frac{\Delta T}{T_c} - 6 \Delta T \frac{\Delta v}{v_c} - \frac{3}{2} \Delta v^3$

$p = - \frac{\partial F}{\partial V} \Rightarrow$ auch hier ist F gerade in Δv !

allgemeiner Landau-Ansatz für
Systeme mit PÜ 2. Ordnung

$F(m, T) = a(T) + \frac{1}{2} b(T) m^2 + \frac{1}{4} c(T) m^4 + \frac{1}{6} d(T) m^6$
 ↑
 Ordnungsparameter

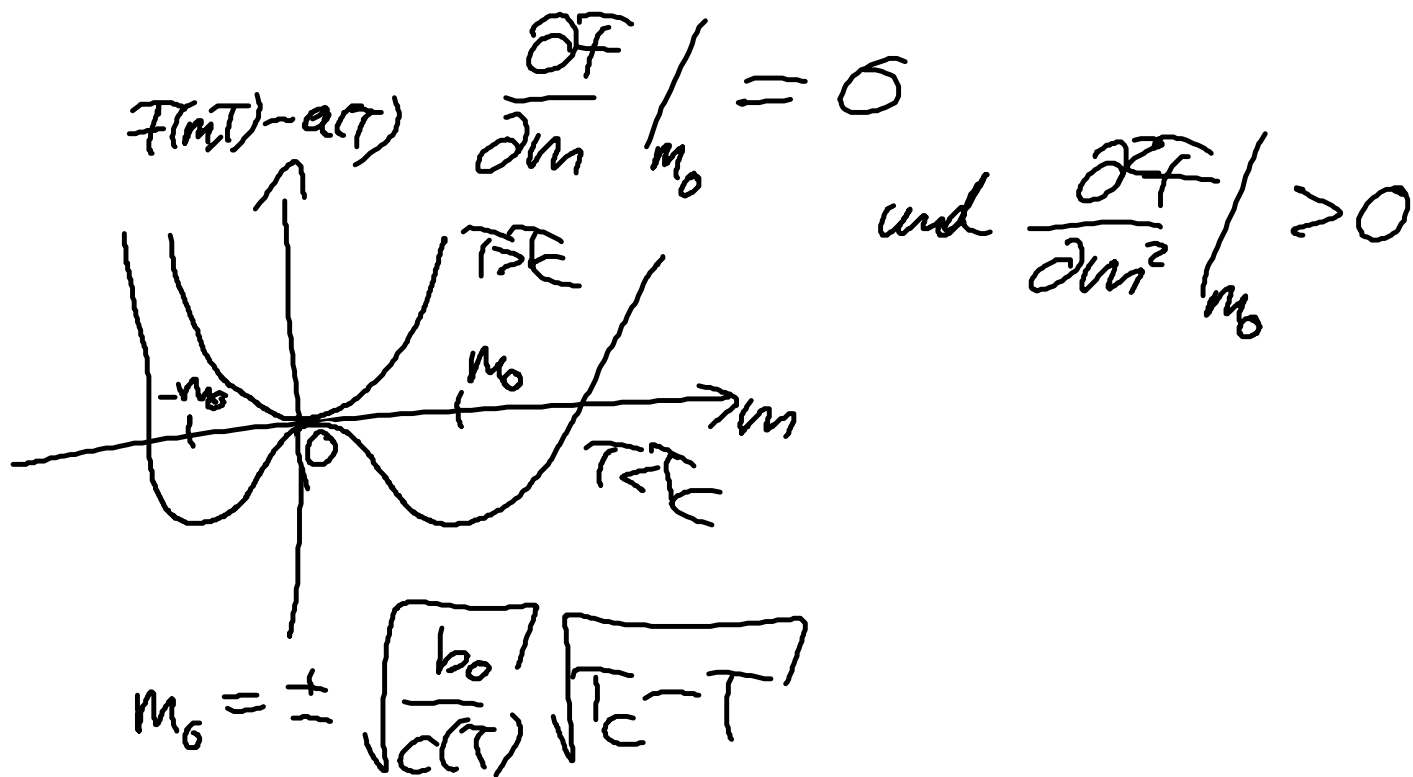
Annahme: $b(T) = b_0 (T - T_c)$ mit $b_0 > 0$

$c(T) > 0$

$d(T) > 0$ (fordert man immer!)

Gleichgewichtsverhalten, d.h.

Ordnungsparameter als Funktion von T
und der Koeffizienten



PÜ 1. Ordnung:

$$F(m, T) = a(T) + \frac{1}{2} b(T) m^2 + \frac{1}{4} c(T) m^4 + \frac{1}{6} d(T) m^6$$

$$b(T) = b_0 (T - T_c^0)$$

$$c(T) < 0 \quad \forall T$$

$$d(T) > 0$$

aus $\frac{\partial F}{\partial m} \Big|_{m_0} = 0$ findet man zunächst:

$$m_0^2 = -\frac{c(T)}{2d(T)} + \sqrt{\frac{c^2 - 4bd}{4d^2}}$$

$$c(T) = c, \quad d(T) = d$$

es stellt sich heraus, dass die

$$\text{Lösung } m_0^2 = -\frac{c}{2d} + \sqrt{\quad}$$

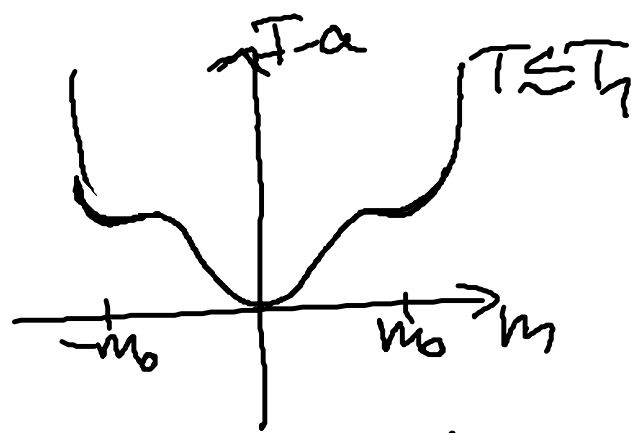
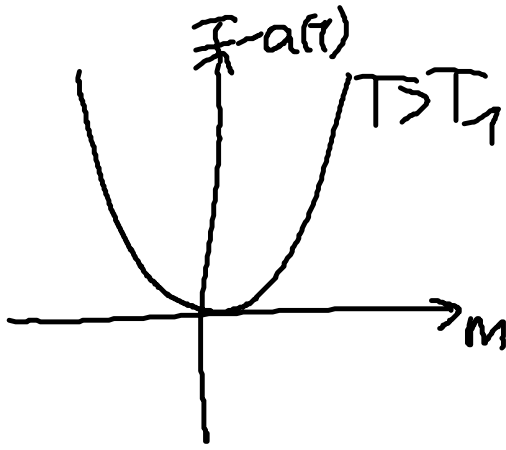
immer existiert ist! (Maximum von T)

betrachte $m_0^2 = -\frac{c}{2d} + \sqrt{\frac{c^2 - 4bd}{4d^2}}$ ($c < 0!$)
von Null verschieden.

Lösungen existieren, falls $c^2 - 4bd > 0$

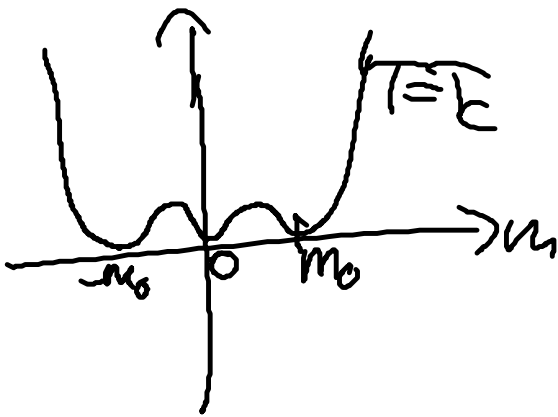
$$b = b_0(T - T_c)$$

$$\Rightarrow T \leq T_1 = T_c + \frac{c^2}{4b_0d}$$

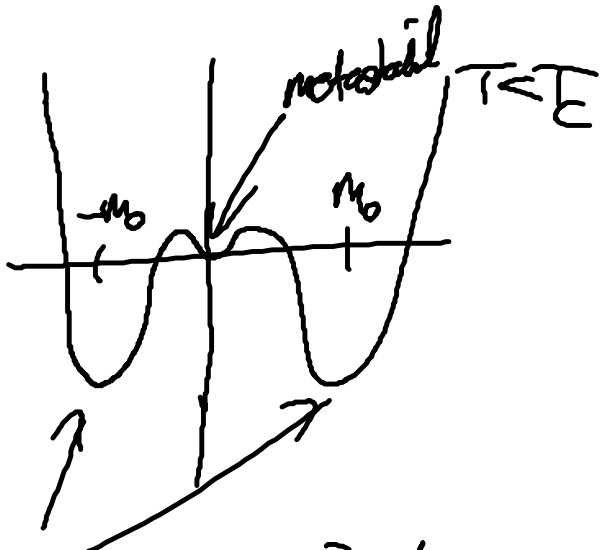


3 Minima, aber das bei $m=0$ hat die tiefste freie Energie und ist damit "global stabil".

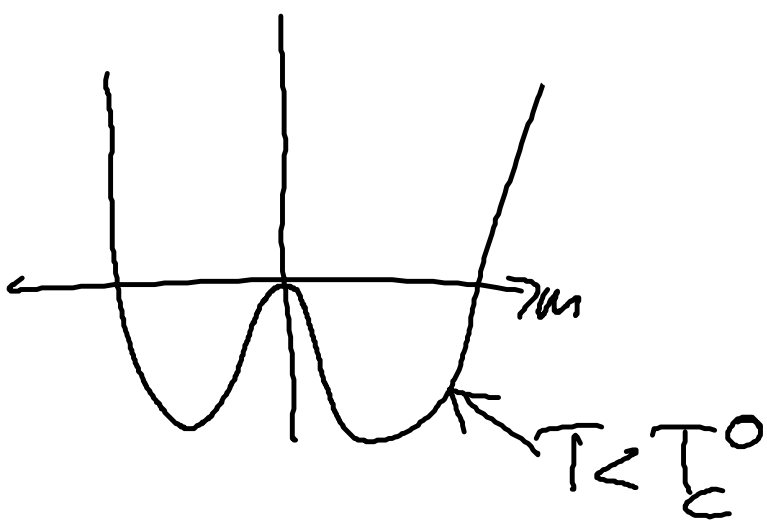
Die Minima bei $\pm m_0$ sind nur metastabil.



T_c "Koexistenztemperatur"
 hier ist $F(\pm m_0) = F(m=0)$!
 (auch "Übergangstemperatur")

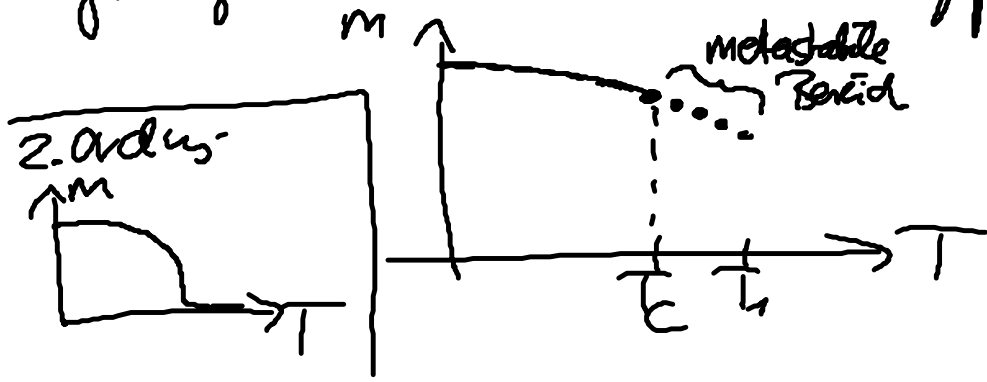


global stabile Minima



Die Lösung $m=0$
wird hier instabil

Gleichgewichts-Verhalten des Ordnungsparameters



"Sprung" im
Ordnungsparameter