

Ideen f. Ableitung der Bewegungsgleichung f. Elektronenflüssigkeit
(konkrete Durchführung: Übungszeits)

ausgehend von der Kontinuitätsgleichung $\partial_t \rho_n = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_n$, $\vec{j}_n = \rho_n \vec{u}_n$
auf 2 Weisen $\partial_t (u; \rho)$ berechnen Ausatz

$$(1) = \partial_t (u; \rho) = \dots$$

$$(2) = \partial_t (j_i) = \partial_t \left\langle \sum_n q_i r_{ni} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \right\rangle$$

(1)-(2) verwenden und die Faktorisierung

von Mittelwerten: $\langle AB \rangle = \langle (A + \delta A) (B + \delta B) \rangle$
 $\approx \langle A \rangle \langle B \rangle + \text{Korrelatur}$

4.2. Makroskopische Dipolbeichte

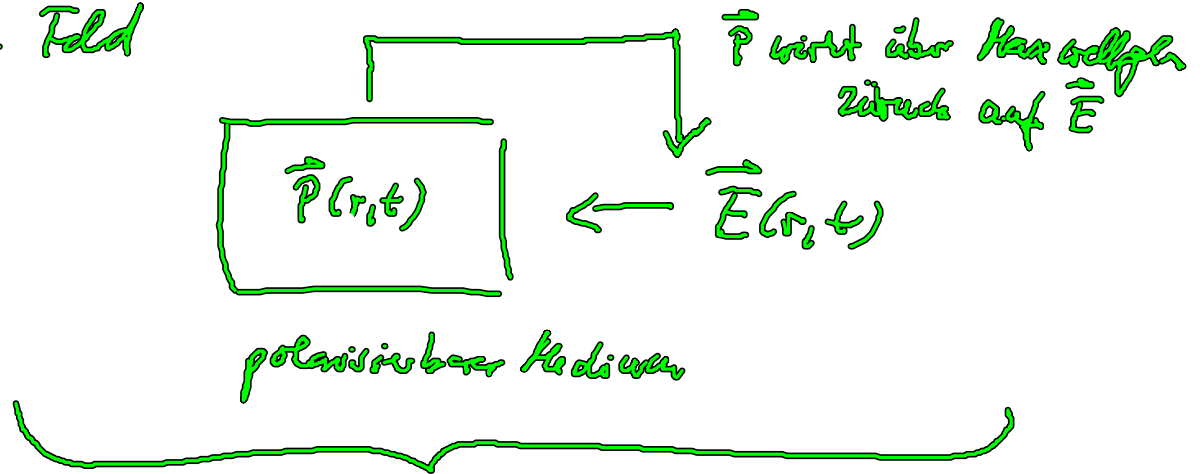
klassische Elektronen, an Atomkern harmonisch gebunden

 „gebundene Elektronen“ n -te Oszillator

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \sum_n \vec{d}_n(t) q (\vec{r} - \vec{r}_n)$$

$$\ddot{\vec{P}}(\vec{r}, t) + \gamma \dot{\vec{P}}(\vec{r}, t) + \omega_0^2 \vec{P}(\vec{r}, t) = \frac{n_0 q^2}{m} \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Oszillatorgleichung für das Feld des Dipoldichtes im
elektrisch Feld



Maxwellgleichung + Oszillatorgleichung

ω_0 : Schwingungsfrequenz der El um Kern

n_0 : Anzahl dichte der Dipole (Dipolzahl / Volumen)

q : Elektron Ladung, m - Elektron masse

Einfachste Anwendung: Wo kommt die dielektrische Konstante
im Material her?

statische Situation: \vec{E} soll nicht von Zeit abhängen

→ stationäre Lösung ist relevant

$$\vec{P} = \frac{n_0 q^2}{m \omega_0^2} \vec{E} \quad \vec{P} \sim \vec{E} \text{ in statische Fall}$$

Wie bestimmt man ϵ ?

$$\vec{D} = \underbrace{\epsilon_0 \vec{E}} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \Rightarrow \epsilon$$

unser Definition

$$\epsilon = 1 + n_0 \frac{q^2}{m \omega_0^2 \epsilon_0}$$

Damit ist ϵ beschreibbar aus
einem einfachen Modell

Idee zur Ableitung der Bewegungsgleichung f. Dipolstärke

$$\vec{d}_n = \sum_j q_j^{(n)} \vec{r}_{j^n}(t) \quad \text{Dipolmoment des } n\text{-ten Moleküls}$$

$$\ddot{\vec{r}}_{j^n} + \omega_0^2 \vec{r}_{j^n} + \mu \dot{\vec{r}}_{j^n} = \frac{q}{m} \left(\vec{E}_n + \dot{\vec{r}}_{j^n} \times \vec{B}_n \right)$$

↑
phenomenologisch

ebene Wellen,
(Näherung ist ungl: $\vec{B} \rightarrow 0$)

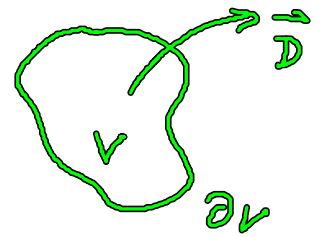
dann beachte die Definition von \vec{d}_n
und damit Gleichung für $\vec{P}(\vec{r}, t)$ löse

(Übungsblatt 3)

5. Grenzbedingungen für makroskopische elektromagnetische Felder

5.1 Integraldarstellungen der Maxwellgleichungen

$$a) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_m \rightarrow \iiint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{D} = Q_m$$

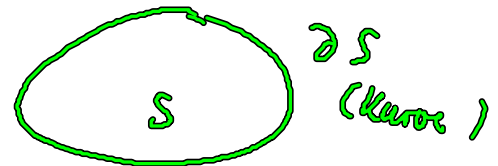


Nettofluß des D -Felds aus V entspricht der umschlossenen Gesamtladung Q

$$b) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \iiint d\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

Nettofluß f. magnetisch Feld aus geschlossenem OF ist 0
 \rightarrow es gibt keine magnetische Ladungen

$$c) \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_m + \partial_t \vec{D}$$



$$\oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{H} = \iint_S d\vec{A} \cdot (\vec{j}_m + \partial_t \vec{D}) = I \quad \text{Fluch } S$$

Ampere - Maxwell Gesetz: Linienintegral über \vec{H} ergibt den Gesamtstrom der durch die umschlossene Fläche fließt

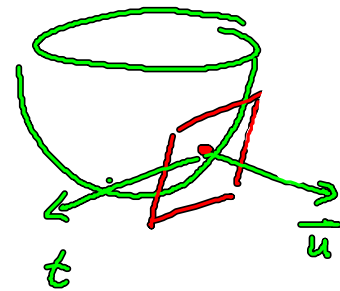
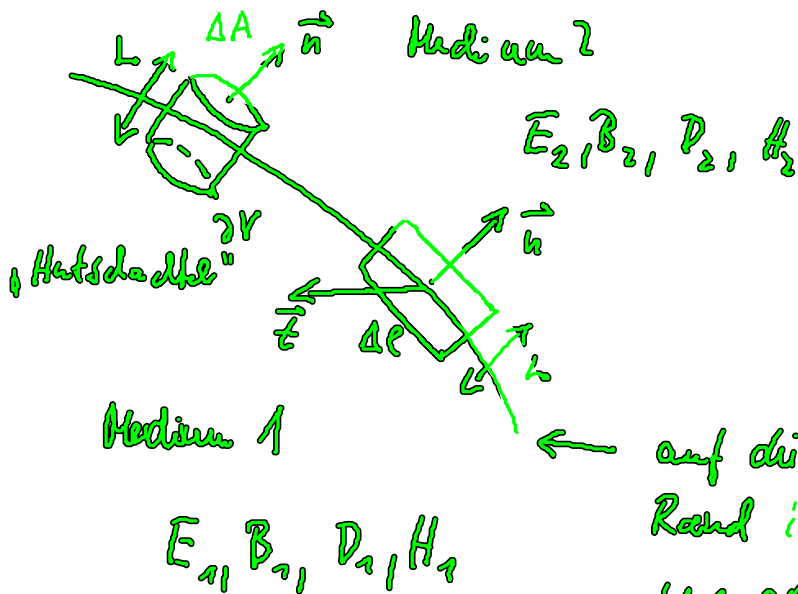
$$d) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \rightarrow \oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{E} = -\partial_t \int_S d\vec{A} \cdot \vec{B}$$

Faraday-Gesetz: Induzierte elektromagnetische Kraft (Spannung) ist proportional zur Zeitableitung des magnetischen Flusses $\int_S d\vec{A} \cdot \vec{B}$.

(hier um β , um ∞ wandelt, eine Leiterschleife festlegen)

5.2 Felder an Grenzflächen

integrale Form der Maxwellgleichungen unter Stetigkeitsbedingung an Grenzflächen zweier Medien zu formulieren.



← auf diesen Rand interessiert uns Verhalten

\vec{n} : Normalenvektor \perp auf der Oberfläche
 \perp zur Tangentialebene

Normale der Seite $\hat{=} \vec{t}$, ist tangential zur Oberfläche

Felds werden nach \vec{u} und \vec{t} zerlegt

$$\vec{X} = \underbrace{x_u \vec{u} + x_t \vec{t}}$$

Projektion aus und in der Ebene

Auswertung der integralen Maxwellgleichungen f. $L \rightarrow 0$

Um Grenzbedingung zu formulieren, Felds als endlich gefasst

a) $\oint d\vec{A} \cdot \vec{D} = \int dV \rho_a(r)$ (Hutschachtel Radius R_0)

$$\underbrace{2\pi R_0 L}_{\substack{\text{Oberfläche des} \\ \text{abgesetzten} \\ \text{Hutes} \\ \downarrow \\ \text{Mittelwert nach} \\ \text{Mittelwertsatz}}} \vec{D} + \underbrace{(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} \Delta A}_{\substack{\text{Skalarprodukt}}} = \begin{cases} \Delta A L \rho & \text{wenn } \rho \text{ endlich} \\ \Delta Q \frac{\Delta A}{\Delta A} & \text{wenn } \rho \rightarrow \infty \end{cases}$$

für endlich Ladungsdichte: $L \rightarrow 0$

$$\vec{D}_2 \cdot \vec{n} = \vec{D}_1 \cdot \vec{n}, \quad D_{1n} = D_{2n}$$

für unglw unendlich Ladungsdichte $L \rightarrow 0$

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \sigma, \quad \sigma = \frac{dQ}{dA}$$

Flächenladungsdichte auf der Grenzfläche

Die Normalkomponente von \vec{D} springt an einer Grenzfläche um die makroskopische Flächenladungsdichte σ (Metall). In Dielektrika ist die Normalkomponente von \vec{D} stetig an der Grenzfläche.

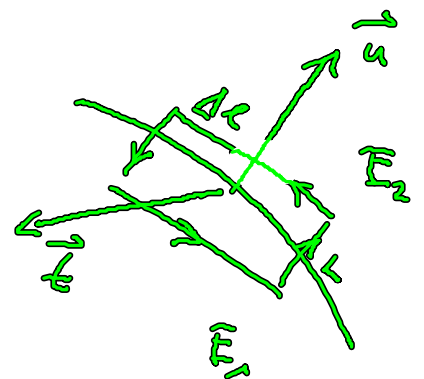
b) analoge Rechnung:

Die Normalkomponente von \vec{B} ist an dem Übergang zweier Grenzflächen stetig:

$$B_{n_1} = B_{n_2} \quad (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0$$

führt zum \vec{E} , \vec{H} -Feld

$$c) \underbrace{\oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{E}} = - \iint d\vec{A} \cdot \partial_t \vec{B}$$



Linienintegrale \perp , \parallel zur Grenzfläche

rechte Seite wird Null für $L \rightarrow 0$ nach Mittelwertsatz

→ i) \perp zur Oberfläche: auch hier $\int \cdot L \rightarrow 0$ kein Beitrag nach Mittelwertsatz

ii) // zu Oberfläche entlang von $\Delta \ell$

$$0 + \text{''} = 0$$

$$\Delta \ell \vec{E}_2 \cdot (\vec{t} \times \vec{u}) - \Delta \ell \vec{E}_1 \cdot (\vec{t} \times \vec{u}) = 0$$

↑
Länge des Integrals

↑
Projektion auf Kurve

↑
konfig. bed. Bed.

Zyklisch Vertauschg.

$$(\vec{t} \times \vec{u}) \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$$\vec{t} \cdot (\vec{u} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)) = 0$$

$$\vec{u} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

Die Tangentialkomponente von \vec{E} an 2 Grenzflächen ist stetig

$$d) \underbrace{\oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{H}} = \iint_S d\vec{A} (\vec{j}_m + \partial_t \vec{D}) = \Delta I \quad \rightarrow \text{Strom der durch Schleife}$$

Ausgang \vec{E} -Feld (c)

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot (\vec{t} \times \vec{n}) \Delta \ell = \begin{cases} 0 & \text{f. endliches } j_n \\ \frac{\Delta I}{\Delta \ell} & \text{f. ungleiche } j_n \\ \infty & \text{f. } j_n \end{cases}$$

an der Grenzfläche fließt

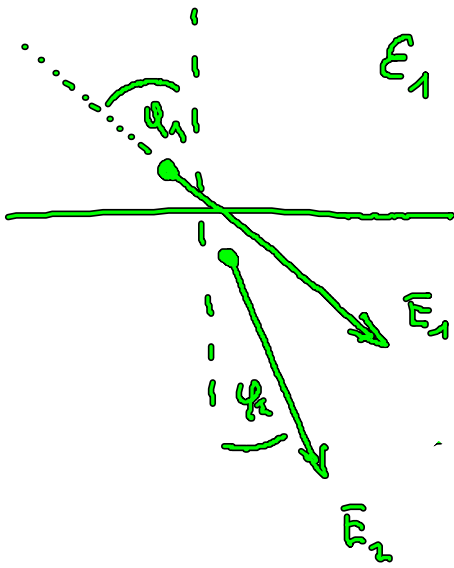
$$\vec{t} \cdot \vec{k} = \frac{\Delta I}{\Delta \ell} = \text{Linienstromdichte auf der Grenzfläche}$$

$$\vec{t} \cdot (\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)) = \vec{t} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{k}$$

Die Tangentialkomponente von H springt um die verbleibende Linienstromdichte \vec{k} , \vec{k} ist 0 in Nichtleiter, hier ist die Tangentialkomponente von H stetig ($H_{t_1} = H_{t_2}$).

Beispiel Brechung der Feldlinien im Dielektrikum



$$D_{n1} = D_{n2} \rightarrow \epsilon_1 \bar{E}_1 \cos \varphi_1 = \epsilon_2 \bar{E}_2 \cos \varphi_2$$

$$E_{t1} = E_{t2} \rightarrow E_1 \sin \varphi_1 = E_2 \sin \varphi_2$$

$$\left(\begin{array}{l} \vec{D}_i = \epsilon_i \epsilon_0 \vec{E}_i \\ i = 1, 2 \end{array} \right)$$

$$\underbrace{\frac{\tan \varphi_1}{\tan \varphi_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}_{\text{f. keine Winkel:}}$$

Die Feldlinien werden bei Übergang von dichter zu dünner Material $\epsilon_1 > \epsilon_2$ zum Lot hin gebrochen

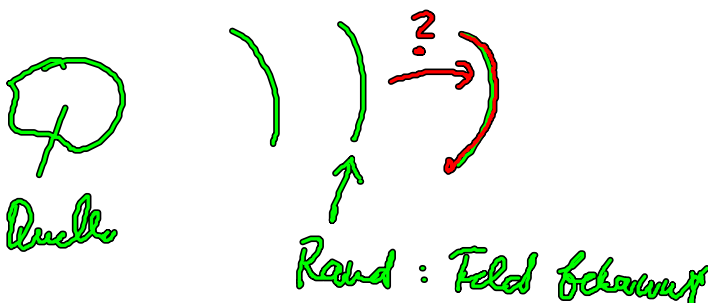
$$\varphi_1 \approx \varphi_2 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

Achtg: \vec{k} -Vektor bei Licht ist \perp auf \vec{E} .

III Elektromagnetische Felder im Vakuum

Motivation: Licht, Radio, etc.

Berechnung des Felds außerhalb von Quelle aus Rand- und Anfangswertprobleme möglich?



1. Wellengleichung im Vakuum

$$\text{aus } \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}}_{\text{rot E = -\dot{B}}}, \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}}_{\text{rot B = \frac{1}{c^2} \dot{E}}}, \quad \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{array}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

$$\underbrace{\nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}}_{=0} = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E}$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Wellengleichung} \\ \text{gilt f. jede Komponente} \end{array}$$

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{B} = 0 \quad \text{gilt analog}$$

im Gegensatz zu gewöhnlichen Dgl gibt es eine
wesentlich höhere Lösungsraumdimension

- gewöhnliche Dgl: n -ter Ordnung $\rightarrow n$ parametrisch klar (Trennungssystem)
- partielle Dgl: in allgemeinen haben n unbestimmte Funktionen auf (n Ordnung der Dgl - Ableitg.) mit $(p-1)$ Variable (p ist Zahl der unabhängigen Variablen in Dgl.)

Wellengleichung im 1d: $x, t, \partial_x^2, \partial_t^2 \rightarrow n=p=2$

$$\text{Lsg: } f(x-ct) + g(x+ct)$$

Hausübung!

2. Spektralzerlegung des \vec{E} -Feldes

Spektralanalyse eines Feldes findet durch Fourierzerlegung statt

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \vec{E}(\vec{r}, t) e^{i\omega t}$$

in Messung wird das Powerspektrum $|\vec{E}(\vec{r}, \omega)|^2$ bestimmt,
kommt aus Quantentheorie der Photoabsorption $\hbar\omega \downarrow \begin{matrix} |2\rangle \\ \downarrow \\ |1\rangle \end{matrix}$

dh. i.a. ist es das Ziel, Powerspektrum zu bestimmen.