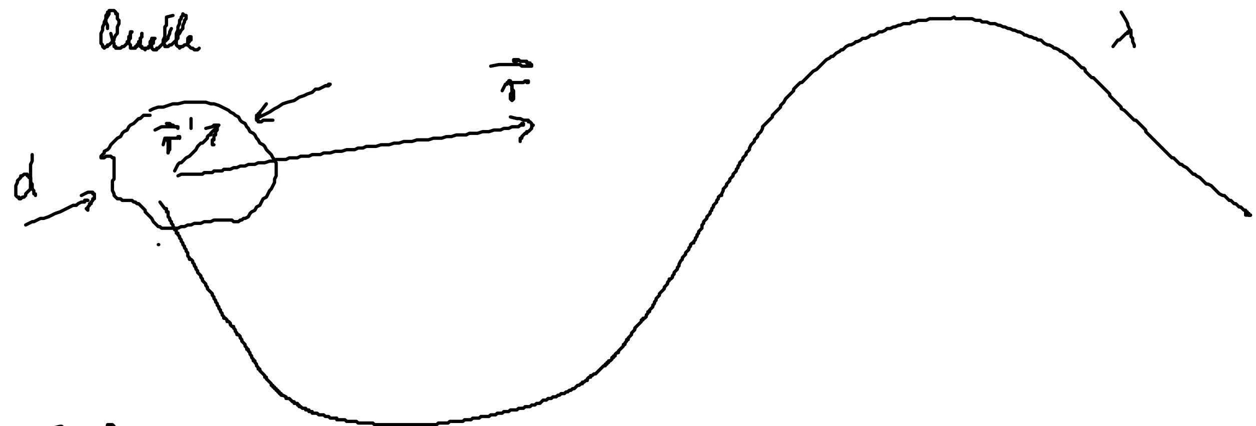
4.2. Multipolstrahlung für kleine Quellen

Voraussetzg.: kleine Quellen $d \ll \lambda$, dann auch $d \ll r$ ($r' \ll r$)



Ziel:

aus $$\vec A(\vec r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_\omega \int d^3 r' \, \frac{e^{ik|\vec r - \vec r'|}}{|\vec r - \vec r'|} \vec j_\omega(r') e^{-i\omega t}$$

das Feld zu berechnen

ω muß so gewählt werden, daß die Quelle klein ist über

$$\omega = ck = c\frac{2\pi}{\lambda} .$$

$$|\vec r - \vec r'| = \Big| \underbrace{|\vec r| \gg |\vec r'|}_{\text{punktförmige Quelle}} \Big| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec r \cdot \vec r'}$$

$$\approx r - \frac{\vec r}{r} \cdot \vec r'$$ (1. Term von $\sqrt{1+x}$ nach Taylor), vorher auf $r\sqrt{\dots}$ umschreiben)

(nicht so nah an Quelle Felder ansehen

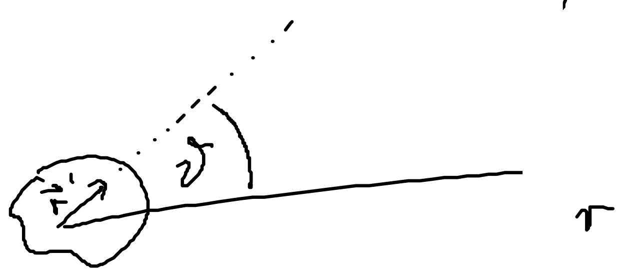
wie die Quelle groß ist)

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\omega} \int d^3r' \, \vec{j}_\omega(\vec{r}') \, \frac{e^{ikr}}{r} \, e^{-ik\vec{e}_r\cdot\vec{r}'} \, e^{-i\omega t}$$

- Nenner nicht mitentwickelt ist nicht so wichtig wie die exp-Funktion für $\omega \neq 0$, Nenner wichtig um zur Elektrostatik zurück zu kommen

- $e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx e^{ikr - k\vec{e}_r\cdot\vec{r}'} = e^{ikr} e^{-ik\cos\vartheta \, r'}$

  $\vec{e}_r$ Einheitsvektor $\frac{\vec{r}}{r}$



entstehendes Feld ist winkelabhängig,
Korrektur zu Fernfeld aus reinen Kugelwellen (besser)

jetzt anwenden, daß Ausdehnung der Quelle klein als λ ist

$$e^{-ik\vec{e}_r\cdot\vec{r}'} = e^{-i\frac{2\pi}{\lambda} r'\cos\vartheta}, \text{ enthält } \frac{r'}{\lambda} \ll 1$$

damit kann Exponent entwickelt werden:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\omega} \frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{r} \int d^3r' \, \vec{j}_\omega(\vec{r}') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik\vec{e}_r \vec{r}')^n}{n!}$$

Diese Reihenentwicklung stellt die Multipolentwicklung dar, wenn man $n \leq m$ mitnimmt in der Rechnung so „Multipolentwicklung" m-ter Ordnung

Bsp., siehe Kapitel V 1. Term ≙ strahlender Dipol

4.3. Berechnung des Strahlungsfeld beliebiger Quellen im Fernfeld

E, B im Fernfeld bestimmen $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$

soll aber auch f. nicht punktförmige Quellen gelten, Ausdehnung der Quellen oft $\sim \lambda$ bei Antennen

$$\vec{A}_\omega = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r \, \vec{j}_\omega(\vec{r}') \, e^{-ikr'\cos\vartheta} \qquad (\sphericalangle(\vec{r},\vec{r}') = \vartheta)$$

$$(*) \quad \left.\begin{aligned} \vec{B}_\omega &= \vec{\nabla} \times \vec{A}_\omega \\ \vec{E}_\omega &= -\vec{\nabla}\phi_\omega + i\omega \vec{A}_\omega \end{aligned}\right\} \text{Fouriertrafo für Bestimmung der Felder aus den Potentialen}$$

+ Lorenzbedingg. $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_\omega = i\,\frac{\omega}{c^2}\,\phi_\omega$

(*) $\vec{E}_\omega = i\,\frac{c}{k}\,\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_\omega + i\omega\vec{A}_\omega$

Gleichungen f. $\vec{E}_\omega$, $\vec{B}_\omega$ gelten allgemein

(*) auf Fernfeld umschreiben:

$\vec{\nabla} = \left(\partial_r,\ r^{-1}\partial_\vartheta,\ \frac{1}{\sin\vartheta\, r}\partial_\varphi\right)$ in Kugelkoordinaten

nehmen wieder nur führenden Term in $\frac{1}{r}$ mit, also nur

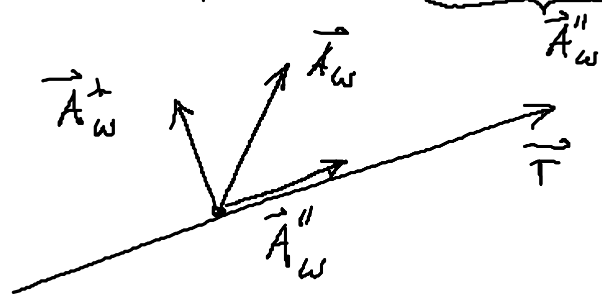
$\vec{\nabla} = \vec{e}_r\,\partial_r$, die anderen Terme tragen im Fernfeld weniger bei.

benötige:

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_\omega = ik\left(\vec{e}_r\cdot\vec{A}_\omega\right)$, $\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_\omega = (ik)^2\,\vec{e}_r\left(\vec{e}_r\cdot\vec{A}_\omega\right)$

nur e^{ikr} differenzieren, fernfelddominanter Term

$\longrightarrow \vec{E}_\omega = i\omega\left(\vec{A}_\omega - \underbrace{\vec{e}_r\left(\vec{e}_r\cdot\vec{A}_\omega\right)}_{\vec{A}_\omega^{\parallel}}\right) = i\omega\,\vec{A}_\omega^{\perp}$



$\vec{A}_\omega^\perp$ ist der Anteil $\perp$ zur Beobachtungsrichtung,

<u>nur dieser wird als E-Feld beobachtet!</u>

$$\rightarrow \vec{E}_\omega = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\,\vec{j}_\omega^\perp(\vec{r}')\,e^{-ikr'\cos\vartheta}$$

Damit ist das elektrische Feld einer beliebigen Quelle im Fernfeld bestimmt $\vec{j}_\omega^\perp = \vec{j}_\omega - \vec{e}_r(\vec{e}_r\cdot\vec{j}_\omega)$

Beispiel: Antenne in Kapitel $\underline{V}$

5. Grenzübergang zu statischen Feldern

statisch bedeutet $\omega\to 0$, d.h. kein Frequenzabhängigkeit

$$\vec{A}_\omega = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\vec{j}_\omega(\vec{r}')\,\frac{e^{\cancel{i\frac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|}}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad =1$$

$$\vec{E}_\omega = \underbrace{i\frac{c^2}{\omega}\vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_\omega}_{\text{wegen Singularität Vorsicht geboten!}} \cancel{+i\omega\vec{A}_\omega}$$

$$E_\omega(\vec r) = i\frac{c^2}{\omega}\vec\nabla\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\vec j_\omega(r')\cdot\left(-\nabla'\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\right)\right)$$

$\nabla\cdot$ reingezogen und auf $\vec r\,'$ angewendet statt auf $\vec r$

$$= i\frac{c^2}{\omega}\vec\nabla\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\vec\nabla'\cdot\vec j_\omega(\vec r\,')\frac{1}{|\vec r-\vec r\,'|}$$

Kontinuität

$$= i\frac{c^2}{\cancel{\omega}}\vec\nabla\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{i\cancel{\omega}\rho_\omega(\vec r\,')}{|\vec r-\vec r\,'|} \qquad (\omega\to 0)$$

$$= -\vec\nabla\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec r\,')}{|\vec r-\vec r\,'|}$$

$\longrightarrow$ Elektrostatik als Grenzfall $\omega\to 0$

Feld als Gradient des Potentials $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\frac{\rho(\vec r\,')}{|\vec r-\vec r\,'|}$

Multipolentwicklg. in der Elektrostatik entwickelt die Einzelne im Nenner.

V Abstrahlung klassischer Quellen

1 Strahlungsfeld des elektrischen Dipols

punktförmige Quelle, Multipolentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty}(\dots)^n\frac{1}{n!}$

$$\vec A_\omega(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\,\vec j_\omega(\vec r\,')\,1 \qquad \text{f. } n=0$$

$$\vec{r}' = (x'^1, x'^2, x'^3) \qquad \int d^3r' \sum_{\alpha\beta} \vec{e}_\beta \underbrace{(\partial_\alpha x'^\beta)}_{\delta_{\alpha\beta}} j^\alpha_\omega(\vec{r}')$$

$$\vec{j} = (j^1, j^2, j^3)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3$$

partielle Integration

$$\int d^3r' \left(-\vec{r}' \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}_\omega(\vec{r}')\right)$$

$$-i\omega \underbrace{\int d^3r' \, \vec{r}' \rho_\omega(\vec{r}')}_{\vec{d}_\omega}$$

$\vec{d}_\omega$ Dipolmoment der Ladungsverteilung

$$\Rightarrow A_\omega(\vec{r}) = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \vec{d}_\omega \frac{e^{ikr}}{r}$$

enthält die Infos zu anisotroper Feldverteilung

Fernfeld nach Abschnitt 4.3 (IV):

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi} \left(\vec{e}_r(\vec{e}_r \cdot \vec{d}_\omega) - \vec{d}_\omega\right) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_\omega \omega^2 \left(-\vec{d}_\omega^{\perp}\right) \frac{e^{i(\underline{\underline{\frac{\omega}{c} r}} - \omega t)}}{r}$$

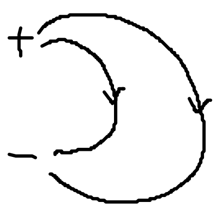
$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\vec{d}^{\perp}\left(t-\underline{\underline{\frac{r}{c}}}\right)\right)$$

Das elektrisch Feld eines zeitabhängigen Dipols $\vec{d}(t)$ am Ort $\vec{r}=0$, ist proportional z. Beschleunigg. des Dipols; die Laufzeit erscheint im Argument $t-\underline{\frac{r}{c}}$.

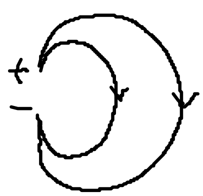
Veranschaulichg. des oszillierend Dipols, dargestellt aus 2 Ladungen:

$t=0$ $\quad$ $\pm$ sitzen aufeinander, spiegelsymmetrie

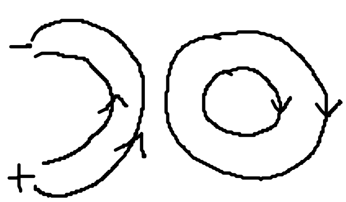
$t=\frac{T}{4}$



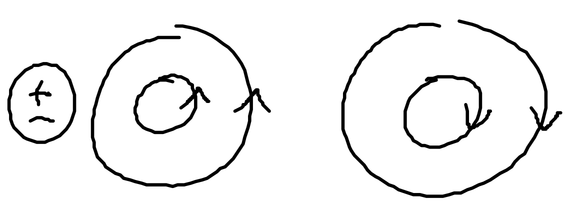
$t=\frac{T}{2}$



$t=\frac{3}{4}T$



$t=T$



Abtrennung der Feldbündel nach $\frac{T}{2}$ Zeit

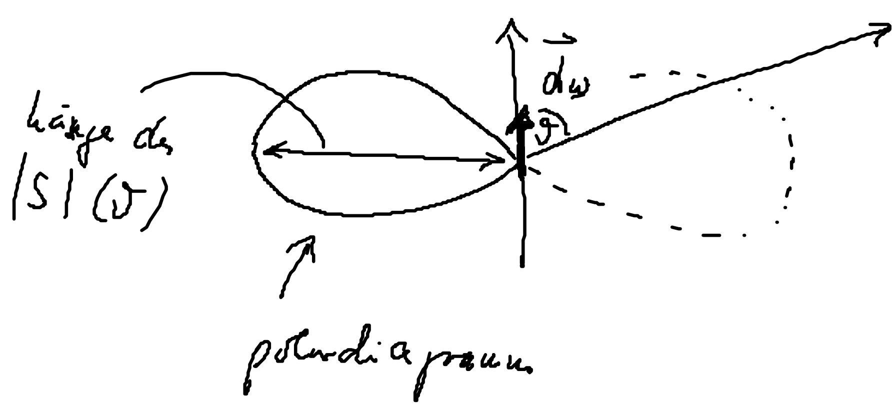
Laufzeit $t - \frac{r}{c}$ führt zu Bewegg. und

Ausbreitung im freien Raum

Poynting vektor (Energie strom)

$$S_\omega = E_\omega \times H_\omega \qquad \vec{E}_\omega = \text{bekannt}, \quad \vec{H}_\omega = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{E}}{i\omega\mu_0}$$

$$S_\omega \sim d_\omega^2 \sin^2\vartheta \, \vec{e_r}$$

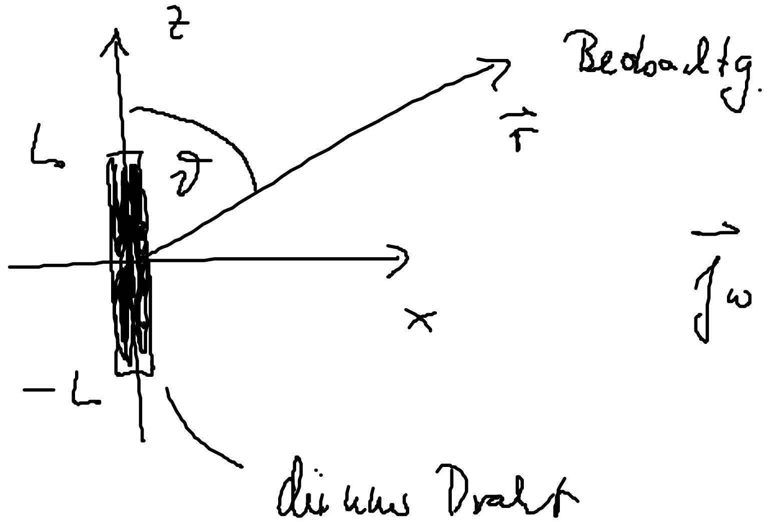


Die abgestrahlte Energie d. Dipols wird maximal $\perp$ zu seiner Orientierung und verschwindet in Richtung seiner Orientierung.

2. Die lineare Antenne

Strahlung von ein dünnen stromführend Leiter

$I_\omega(z)$ sei Strom im Leiter



$$\vec j_\omega(\vec r) = \underbrace{I_\omega(z)\,\delta(x)\,\delta(y)}_{\text{ganz dünner Strom auf d. z Achse zwischen } [-L,L]}$$

Wende Formel im Fernfeld f. beliebige Verteilungen an

$$\vec E_\omega = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\,\frac{e^{ikr}}{r}\,\underline{\underline{\int d^3r'\,\vec j_\omega^{\perp}(\vec r')}}\,e^{-ikr'\cos\vartheta}$$

aus 4.3 ($\underline{IV}$)

$$\underline{\underline{\int d^3r'\,j_\omega^{\perp}(\vec r')}} = \int_{-L}^{L} dz'\,I_\omega^{\perp}(z')\,\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\,\delta(x')\int_{+\infty}^{+\infty} dy'\,\delta(y')}_{=1}$$

$$I_\omega^{\perp}(z') = \vec I_\omega - \vec e_r(\vec e_r\cdot\vec I_\omega)\ ,\ \vec I_\omega = \vec e_z I_\omega$$

$$= \vec I_\omega - \vec e_r\left(\frac{\vec r\cdot\vec I_\omega}{r}\right)\ ,\ \vec r\cdot\vec e_z = r\cos\vartheta$$

$$= I_\omega \vec{e}_z - I_\omega \vec{e}_r \cos\vartheta$$

$$= I_\omega (0,0,1) - I_\omega (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)\cos\vartheta$$

$$= I_\omega (-\sin\vartheta\cos\varphi\cos\vartheta, -\sin\vartheta\sin\varphi\cos\vartheta, 1-\cos^2\vartheta)$$

$$= - I_\omega \vec{e}_\vartheta \sin\vartheta$$

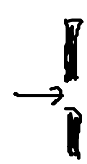
in Zylinderkoordinaten / Kugelkoordinaten
in den kartesischen Koordinaten (x,y,z)

$$E_\omega = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int_{-L}^{L} dz'\, \underbrace{I_\omega(z')\, e}\,{}^{ikz'\cos\vartheta}\sin\vartheta\, \vec{e}_\vartheta$$

Näherg. schlecht, aber trotzdem:

$I_\omega =$ konstant

(eigentlich genügt eine Helmholtzgleichg.

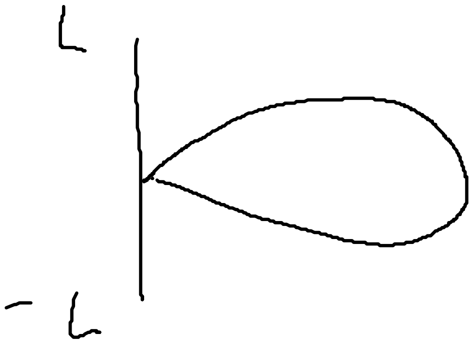


)

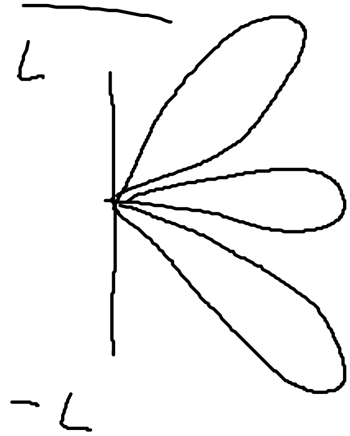
$$|E_\omega|^2 = \frac{\mu_0}{4\pi^2\varepsilon_0}\frac{\tan^2\vartheta}{r^2}\sin^2(kL\cos\vartheta)$$

<u>Abstrahlcharakteristik für $L = m\lambda$</u>

$\underline{m = 1}$



$\underline{m = 2}$



$\underline{kL \to 0}$

$$|E_\omega|^2 \sim \sin^2\vartheta \;\hat{=}\; \underline{\text{Dipol}}$$

Man hat bei einer Antenne eine Mgl. die Abstrahl-charakteristik zu designen wenn man die Länge als Vielfache der Wellen-länge wählt.