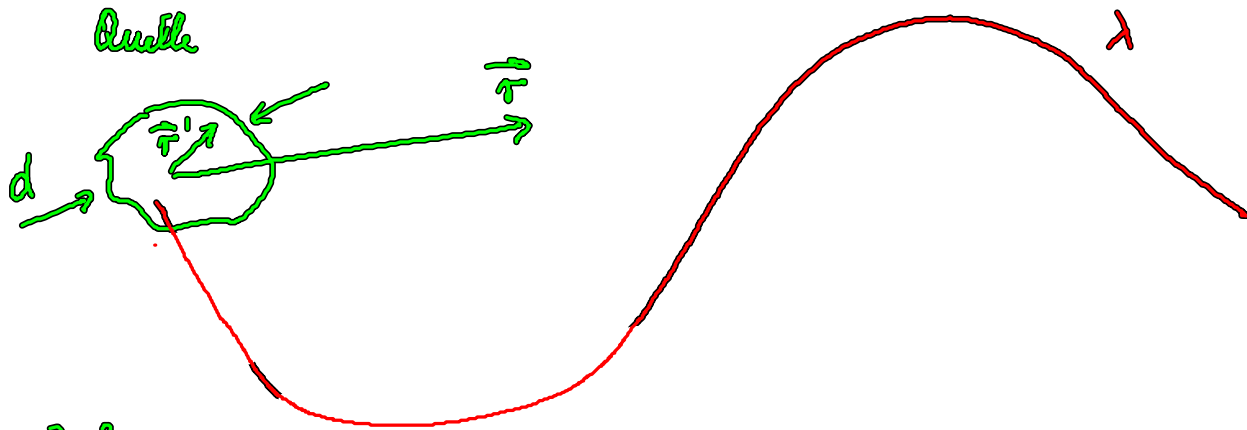


## 4.2. Multipolstrahlung für kleine Quelle

Voraussetz.: kleine Quelle  $d \ll \lambda$ , dann auch  $d \ll r$  ( $r' \ll r$ )



Ziel:

$$\text{aus } \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\omega} \int d^3r' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{j}_{\omega}(\vec{r}') e^{-i\omega t}$$

das Feld zu berechnen

$\omega$  muß so gewählt werden, daß die Quelle klein ist über

$$\omega = ck = c \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \underbrace{\left| \vec{r} \right|}_{\text{punktförmige Quelle}} \gg \left| \vec{r}' \right| \quad \left| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} \right.$$

punktförmige Quelle

$$\approx r - \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r}'$$

(1. Term von  $\sqrt{1+x}$  nach Taylor,  
vorher auf  $r\sqrt{\dots}$   
umschreiben)

(nicht so nah an Quelle Felder ablesen)

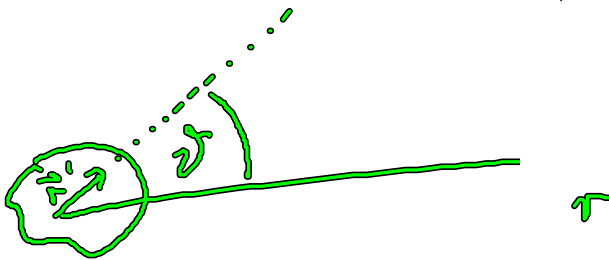
wie die Quelle groß ist )

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\omega} \int d^3r' \vec{j}_{\omega}(\vec{r}') \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} e^{-i\omega t}$$

- Wenn nicht unterteilt ist nicht so wichtig wie die exp-Funktion für  $\omega \neq 0$ , kann wichtig um zu Elektrostatik zurück zu kommen

$$e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \approx e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-ik \cos\theta r'}$$

$\vec{e}_r$  Einheitsvektor  $\begin{matrix} \vec{r} \\ \vec{r}' \\ r \end{matrix}$



entstehendes Feld ist winkelabhängig,

Komplett zur Fernfeld aus reinen Kugelwellen (besser)

gilt anwenden, auf Ausdehnung der Quelle klein als  $\lambda$  ist

$$e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} = e^{-i\frac{2\pi}{\lambda} r' \cos\theta}, \text{ enthält } \frac{r'}{\lambda} \ll 1$$

damit kann Exponent entwickelt werden:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\omega} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \int d^3r' \vec{j}_{\omega}(\vec{r}') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik\vec{e}_r \vec{r}')^n}{n!}$$

Diese Reihenentwicklung stellt die Multipolentwicklung dar, wenn man  $n \leq n$  mitnimmt in der

Rechnung so "Multipolentwicklung"  $n$ -ter Ordnung

Bsp., siehe Kapitel V 1. Term  $\hat{=}$  strahlendes Dipol

### 4.3. Berechnung des Strahlungsfeld beliebiger Quelle im Fernfeld

$E, B$  im Fernfeld bestimmen  $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$

soll aber auch f. nicht punktförmige Quellen gelten,

Ausdehnung der Quellen oft  $\sim \lambda$  bei Antennen

$$\vec{A}_{\omega} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' \vec{j}_{\omega}(\vec{r}') e^{-ikr' \cos \vartheta} \quad \left( \vartheta = \angle(\vec{r}, \vec{r}') \right)$$

$$\left. \begin{aligned} (*) \quad \vec{B}_{\omega} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}_{\omega} \\ \vec{E}_{\omega} &= -\vec{\nabla} \phi_{\omega} + i\omega \vec{A}_{\omega} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Fourierkoeff. für} \\ \text{Bestimmung des Feldes} \\ \text{aus den Potentials} \end{array}$$

+ Lorenzbedingung.  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\omega = i \frac{\omega}{c^2} \phi_\omega$

(\*)  $\vec{E}_\omega = i \frac{c}{k} \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\omega + i \omega \vec{A}_\omega$

gleichung f.  $\vec{E}_\omega, \vec{B}_\omega$  gelte allgemein

(\*) auf Tensorfeld umschreiben:

$\vec{\nabla} = (\partial_r, r^{-1} \partial_\vartheta, \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi)$  in Kugelkoordinaten

nehmen wieder nur führende Terme in  $\frac{1}{r}$  mit abso nur

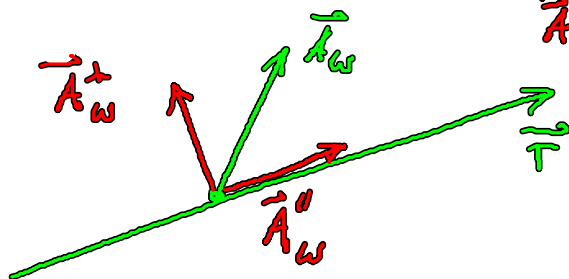
$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \partial_r$ , die andere Terme tragen im Tensorfeld weniger bei.

benötige:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\omega = ik (\vec{e}_r \cdot \vec{A}_\omega)$ ,  $\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\omega = (ik)^2 \vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \vec{A}_\omega)$

wir  $e^{ikr}$  diffieren, feld dominanter Term

$\rightarrow \vec{E}_\omega = i \omega (\vec{A}_\omega - \underbrace{\vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \vec{A}_\omega)}_{\vec{A}_\omega^\parallel}) = i \omega \vec{A}_\omega^\perp$



$\vec{A}_\omega$  ist der Anteil  $\perp$  zur Beobachtungsrichtung,  
was dieses wird als E-Feld beobachtet!

$$\rightarrow \vec{E}_\omega = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' \vec{j}_\omega^{\perp}(\vec{r}') e^{-ikr'\cos\theta}$$

Damit ist das elektrische Feld ein beliebig Quelle im Fernfeld bestimmt  $\vec{j}_\omega^{\perp} = \vec{j}_\omega - \vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \vec{j}_\omega)$

Beispiel: Antenne in Kugel  $\underline{V}$

### 5. Grenzübergang zu statischen Feldern

statisch bedeutet  $\omega \rightarrow 0$ , dh. kein Frequenzabhängigkeit

$$\vec{A}_\omega = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \vec{j}_\omega(\vec{r}') \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 1$$

$$\vec{E}_\omega = \underbrace{i \frac{c^2}{\omega} \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\omega}_{\text{wegen Singularität Vorzeichen geboten!}} + i\omega \vec{A}_\omega$$

wegen Singularität Vorzeichen geboten!

$$E_{\omega}(\vec{r}) = i \frac{c^2}{\omega} \vec{\nabla} \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \vec{j}_{\omega}(\vec{r}') \cdot \left( -\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \right)$$

$$= i \frac{c^2}{\omega} \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}_{\omega}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Kontinuität

$$= i \frac{c^2}{\omega} \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{i\omega \rho_{\omega}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (\omega \rightarrow 0)$$

$$= -\vec{\nabla} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$\vec{\nabla}$  raufgezogen und  
auf  $\vec{r}'$  angewandt  
Stell auf  $\vec{r}$

→ Elektrostatik als Grenzfall  $\omega \rightarrow 0$

Feld als Gradient des Potentials  $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

Multipolentwicklung in der Elektrostatik  
entspricht die Entwicklung im Nenner.

## II Abstrahlung klassischer Quelle

### 1 Strahlungsfeld des elektrischen Dipols

punktförmige Quelle, Multipolentwicklung  $\sum_{n=0}^{\infty} (\dots) \frac{1}{n!}$

$$\vec{A}_{\omega}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r} \int d^3r' \vec{j}_{\omega}(\vec{r}') \quad \text{f. } n=0$$

$$\vec{r}' = (x'^1, x'^2, x'^3) \quad \int d\vec{r}' \sum_{\alpha\beta} \vec{e}_\beta (\partial_\alpha x'^\beta) j_\omega^\alpha(\vec{r}')$$

$$\vec{j} = (j^1, j^2, j^3)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3$$

partielle Integration

$$\int d\vec{r}' (-\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}_\omega(\vec{r}'))$$

$$-i\omega \int d\vec{r}' \vec{r}' \cdot \vec{j}_\omega(\vec{r}')$$

$\vec{d}_\omega$  Dipolmoment der Ladungsverteilung

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \vec{d}_\omega \frac{e^{i\kappa r}}{r}$$

erhält die Infos zu anisotropes Feldverteilung

Fernfeld nach Abschnitt 4.3 (II) :

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = -\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi} (\vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \vec{d}_\omega) - \vec{d}_\omega) \frac{e^{i\kappa r}}{r}$$

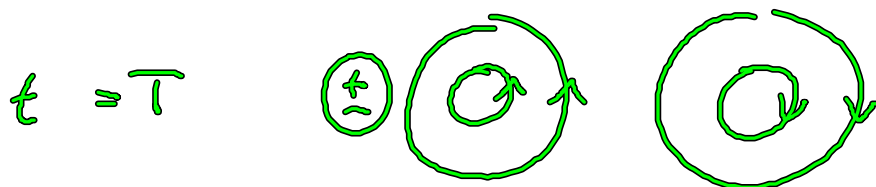
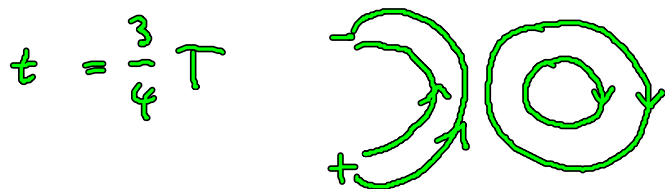
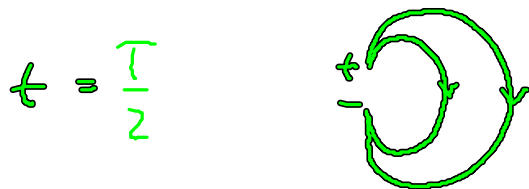
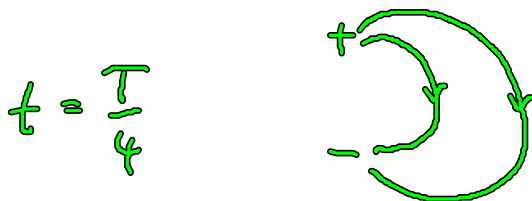
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\omega} \omega^2 (-\vec{d}_\omega^{\perp}) \frac{e^{i(\frac{\omega}{c}r - \omega t)}}{r}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \vec{d}^{\perp} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right)$$

Das elektrische Feld um zeitabhängige Dipol,  $\vec{d}(t)$   
 am Ort  $\vec{r} = 0$ , ist proportional z. Beschleunigg. des Dipols;  
 die Laufzeit erscheint im Argument  $t - \frac{r}{c}$ .

Vereinfachung des oszillierenden Dipols, dargestellt aus  
 2 Ladungen:

$t = 0$      $\oplus$      $\ominus$  sitzen aufeinander, Spiegelsymmetrie



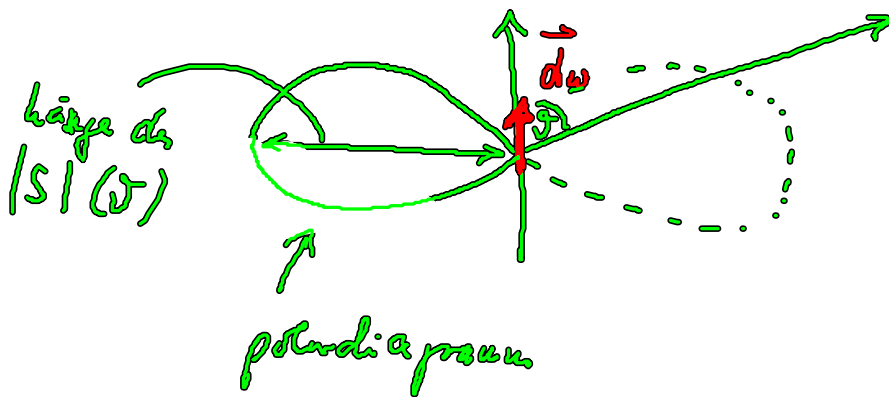


Ablösung des Feldbündel nach  $\frac{1}{2}$  Zeit  
 Laufzeit  $t = \frac{r}{c}$  führt zu Bewegung und  
 Ausbreitung im freien Raum

Poynting vektor (Energiestrom)

$$\vec{S}_\omega = \vec{E}_\omega \times \vec{H}_\omega \quad \vec{E}_\omega = \text{bekannt}, \quad \vec{H}_\omega = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{E}}{i\omega\mu_0}$$

$$S_\omega \sim d\omega^2 \sin^2\vartheta \vec{e}_r$$

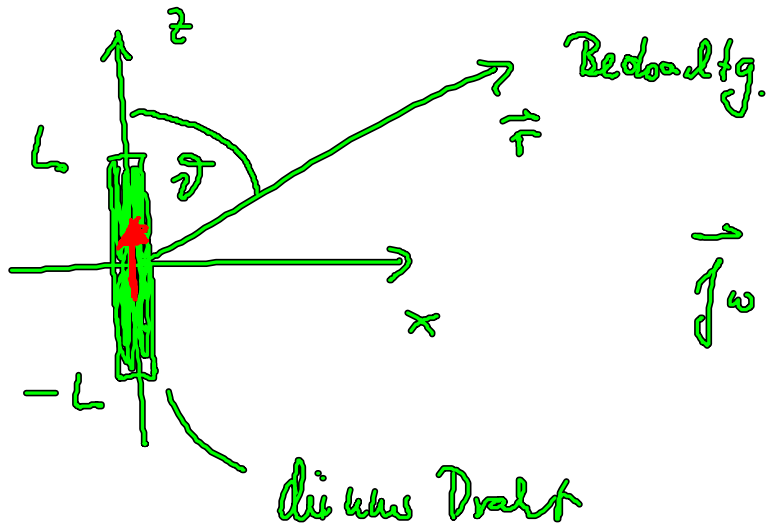


Die abgestrahlte Energie d. Dipols wird maximal  $\perp$   
 zu seiner Orientierung, und verschwindet in Richtung  
 seiner Orientierung.

2. Die lineare Antenne

Strahlung von ein dünnem stromführenden Leiter

$I_0(z)$  sei Strom im Leiter



$$\vec{j}_0(\vec{r}) = I_0(z) \delta(x) \delta(y)$$

ganz dünnes Strom  
auf der z-Achse zwischen  
[-L, L]

Wende Formel im Fernfeld f. beliebige Verteilung an

$$\vec{E}_\omega = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' \vec{j}_\omega^+(\vec{r}') e^{-ikr' \cos\theta}$$

an 4.3 (IV)

$$\int d^3r' \vec{j}_\omega^+(\vec{r}') = \int_{-L}^L dz' I_0^+(z') \int_{-\infty}^{\infty} dx' \delta(x') \int_{-\infty}^{\infty} dy' \delta(y')$$

$$I_0^+(z') = \vec{I}_0 - \vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \vec{I}_0) \quad | \vec{I}_0 = \vec{e}_z I_0$$

$$= \vec{I}_0 - \vec{e}_r \left( \frac{\vec{r} \cdot \vec{I}_0}{r} \right), \quad \vec{r} \cdot \vec{e}_z = r \cos\theta$$

$$= I_0 \vec{e}_z - I_0 \vec{e}_r \cos \vartheta$$

$$= I_0 (0, 0, 1) - I_0 (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) \cos \vartheta$$

$$= I_0 (-\sin \vartheta \cos \varphi \cos \vartheta, -\sin \vartheta \sin \varphi \cos \vartheta, 1 - \cos^2 \vartheta)$$

$$= -I_0 \vec{e}_\varphi \sin \vartheta$$

in Zylinderkoordinaten / Kugelkoordinaten  
in den kartesischen Koordinaten  $(x, y, z)$

$$\vec{E}_\omega = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_{-L}^L dz' I_0(z') e^{ikz' \cos \vartheta} \sin \vartheta \vec{e}_\varphi$$

Näherg. schlecht, aber trotzdem:

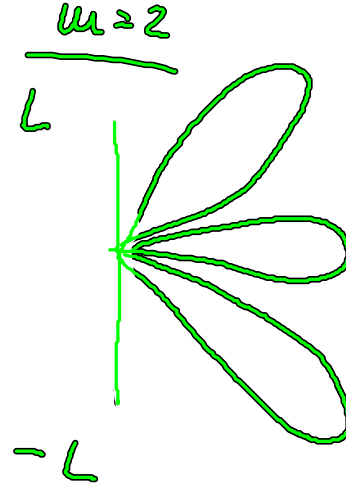
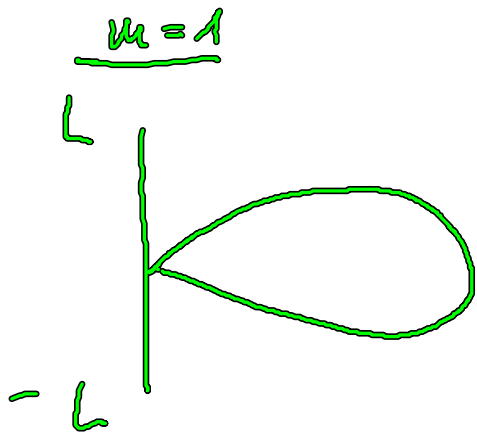
$$I_0 = \text{konstant}$$

( eigentlich gewünscht eine Helmholtzgleichg.

$$\rightarrow \nabla^2 \vec{A} = -\vec{j}$$

$$|\vec{E}_\omega|^2 = \frac{\mu_0}{4\pi^2 \epsilon_0} \frac{\tan^2 \vartheta}{r^2} \sin^2(kL \cos \vartheta)$$

Abstrahlcharakteristik für  $L = \lambda$



$kl \rightarrow 0$

$$|E_{\theta}|^2 \sim \sin^2 \vartheta \hat{=} \underline{\text{Dipol}}$$

Man hat bei einer Antenne ein Ngl. die Abstrahlcharakteristik zu designen wenn man die Länge  $l$  Vielfache der Wellenlänge wählt.