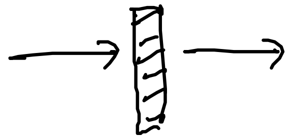
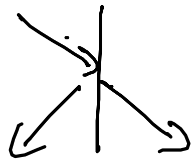
VI Ausbreitung ebener Wellen in Materie

Grenzflächen :  Transmission $t(\omega)$

Fresnelsche Formeln :  Reflexionseigenschaften

1. Wellengleichung in Medien

makroskopische Mittlung :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_m + \partial_t \vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{M} \right) + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$$

Magnetisierg.

makroskopischer Strom → Elektronen in Metallen (frei)

Dipoldichte → gebundene Elektronen in Molekülen / Isolatoren

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

$$\left(\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot - \Delta \right) \vec{E} = -\mu_0 \left(\partial_t j_m + \partial_t^2 \vec{P} + \partial_t \vec{\nabla} \times \vec{M} \right) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E}$$

- diskutieren nur die Ausbreitung ebener Wellen

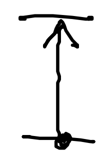
$$\vec{E} = f(z) \vec{e}_x \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

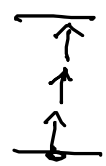
- diskutieren Dielektrikum, also $\vec{P}$

$$\left(\partial_z^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\underbrace{E(z,t)}_{\text{Skalar}} = \mu_0\, \partial_t^2 P$$

2. Mikroskopischer Ursprung der Brechzahl

Ansatz $\quad P_\omega = \varepsilon_0 \underbrace{\chi(\omega)}_{\text{Suszeptibilität}} E_\omega$

$P_\omega \sim E_\omega \longrightarrow$ lineare Optik: linearer Ansatz 

(nichtlinear $\quad P_\omega \sim E_\omega^n$ )

$$\left(\partial_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_\omega = -\mu_0\, \omega^2 P_\omega \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ansatz} \\ \text{(Rechtfertigg. gleich)}}}{=} -\mu_0\, \omega^2 \varepsilon_0\, \chi(\omega) E_\omega$$

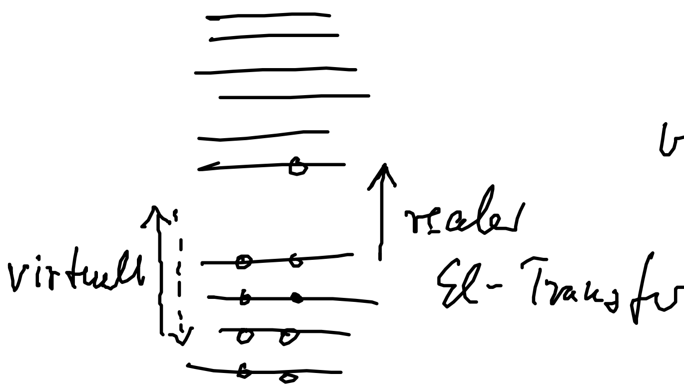
$$\left(\partial_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega)\right) E_\omega = 0 \quad , \quad \mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

führt zur Definition der Brechzahl $n(\omega)$

$$n^2 = 1 + \chi(\omega)$$

enthält Eigenschaften des Mediums

Unterteilung



reale Transfer: resonanter Übergang
(ΔE paßt)

virtueller Transfer:
nichtresonante Übergang

werden unterschieden

$$\rightarrow \chi(\omega) = \underbrace{\chi_{nr}}_{\text{nichtresonanter}} + \underbrace{\chi_r}_{\text{resonanter}}$$

Anteil

3. Ausbreitung ebener Wellen in ausgedehnten Medien

Lsg. der Wellengleichung:

$$E_\omega = \underbrace{E_\omega^0}_{\text{nicht von } z \text{ abhängig}} e^{i \frac{\omega}{c} n(\omega) z}$$

einziger Einfluß d. Mediums

$$n = \sqrt{1+\chi} = \sqrt{1+\chi_{nr}+\chi_r} = \sqrt{1+\chi_{nr}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\chi_r}{1+\chi_{nr}}\right)$$

nichtresonante Effekte sind oft dominant

Absorption oft klein

$$n = n_{nr} + \frac{1}{2}\frac{\chi_r}{n_{nr}}$$

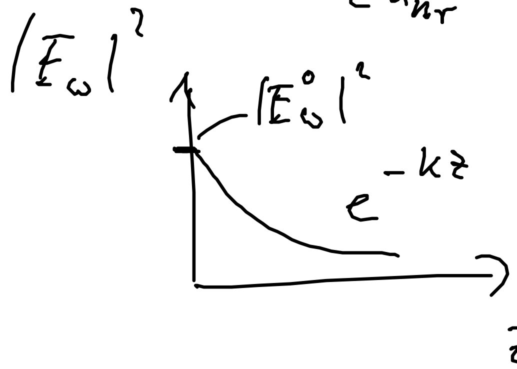
<u>Messung</u>: Powerspektrum $|E_\omega|^2 = |E_\omega^0|^2 e^{-\frac{\omega}{c n_{nr}} \mathrm{Im}(\chi_r) z}$

dabei n_{nr} = reelle Größe, keine Absorption

Man findet das Lambert-Beersche Gesetz:

$$|E_\omega|^2 = |E_\omega^0|^2 e^{-kz}$$

$$k = \frac{\omega}{c n_{nr}} \mathrm{Im}(\chi_r)$$ inverse Absorptionslänge



<u>Was ist die Suszeptibilität?</u>

<u>a) Dielektrika</u>

$$P_\omega = \varepsilon_0 \chi(\omega) E_\omega,$$ $\chi(\omega)$ wird bestimmt

und klassisch Oszillatormodell:

$$\ddot{P}(\vec{r},t) + \gamma_0 \dot{P}(\vec{r},t) + \omega_0^2 P(\vec{r},t) = n_0 \frac{q^2}{m} E(\vec{r},t)$$

P = Dipolfeld das durch das durchlaufende E-Feld angeregt wird und mit diesem über Maxwellgl. wechselwirkt.

$$\chi(\omega) = \frac{q^2 n_0}{m\,\varepsilon_0} \frac{1}{-\omega^2+\omega_0^2-i\omega\gamma_0}, \quad \sum_i \text{ viele Oszillatoren}$$

(i) nichtresonanter Beitrag $\quad \omega_j \gg \omega$

$$\chi_{nr} = \sum_j \frac{q_j^2 n_j}{m\,\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_j^2-\omega^2+i\gamma_j\omega} \simeq \underbrace{\sum_j \frac{q_j^2 n_j}{m\,\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_j^2}}_{\text{reell, nicht von } \omega \text{ abhängig}}$$

ω paßt nicht zu ω_j $(\omega \neq \omega_j)$

j-ter Oszillator

Licht kann keine echte Übergänge erzeugen.

Glasfaser: Dispersion wichtig, hier muß bis ω^2 entwickelt werden, Analogie zur Schrödingergleichung $\rightarrow$ Lichtpulse zerlaufen

(ii) resonante Beitrag der Suszeptibilität $\quad \omega \approx \omega_{j=0}$

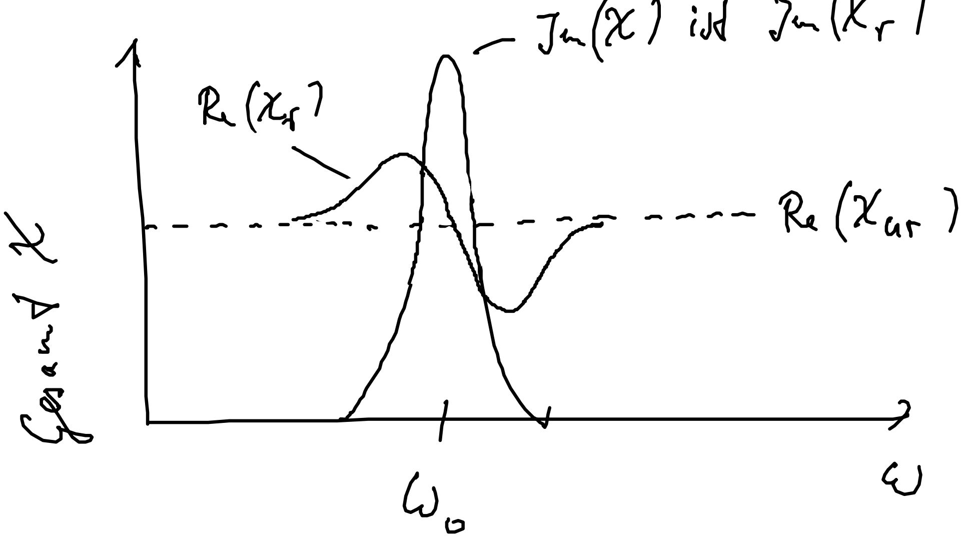
1 Oszillator (0) sei resonant angeregt

$$\chi_r(\omega) = \frac{q^2 n_0}{m \varepsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2 - i\omega\gamma}$$

Resonanz: $\omega \approx \omega_0$, $\quad (\omega_0^2 - \omega^2) = (\omega_0 - \omega)\underbrace{(\omega_0 + \omega)}_{\approx 2\omega_0}$

$$\chi_r(\omega) = \frac{q^2 n_0}{m \varepsilon_0} \frac{1}{2\omega_0(\omega_0 - \omega) - i\omega_0\gamma} = \frac{q^2 n_0}{2 m \varepsilon_0 \omega_0} \frac{i\gamma + (\omega_0 - \omega)}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}$$

→ ergibt Imaginärteil $\gamma \neq 0$ → Absorption



- Entsprechend der Frequenz des eingestrahlten Lichts wird Absorption bei resonanter Anregg. beobachtet.
- Die Brechzahl wird durch nichtresonante / resonante Beiträge bestimmt.
- für $\gamma \neq 0$ sieht man eine endliche Breite der

Lorentzkurve, γ beschreibt die Dämpfung des Oszillators (Umwandlung von Oszillatorenergie in Wärmeenergie, im Festkörper wird das Ionengitter angeregt $\rightarrow$ T-Erhöhung)

b) Metalle: bereits ohmsches Gesetz abgeleitet, hier aber Trick um die Rechnungen von (a) mit zu verwenden: diskutiere $P(\omega)/_{\omega_0^2=0}$ also Rückstellkraft $\rightarrow 0$ $\rightarrow$ freibewegl. Elektronen

$\rightarrow$ Beziehung von $\sigma(\omega)$ an $\chi(\omega)$ mit $\omega_0 = 0$

$$j = \dot{P} \longrightarrow \quad j_{m\omega} = -i\omega P_\omega, \quad j_{m\omega} = \underline{\sigma(\omega)} E_\omega$$

$$= \underline{-i\omega \varepsilon_0 \chi(\omega)} E_\omega$$

$\rightarrow \sigma(\omega) = -i\omega\varepsilon_0 \chi(\omega)$, d.h. $\sigma(\omega) \sim \chi(\omega)$

Suche die Absorption im Metall die durch freie Elektronen hervorgerufen wird:

$$|E_\omega|^2 = |E_\omega^0|^2 e^{-2\frac{\omega}{c} \operatorname{Im}(n) z}$$

n ist gesucht: $\chi(\omega) \underset{\uparrow}{=} -\frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}, \quad \omega_{pl}^2 = \frac{q^2 n_0}{m\varepsilon_0}$

$$\omega_0^2 = 0, \gamma = 0$$

ω_{pl} ist die sogenannte Plasmafrequenz

$$n = (1 + \chi_r)^{1/2} = \left(1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{\omega}\sqrt{\omega^2 - \omega_{pl}^2}$$

nur resonanter Anteil

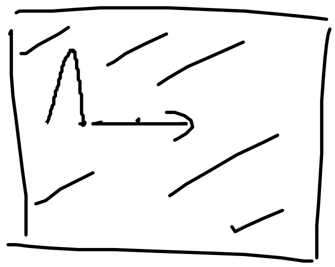
$$|E_\omega|^2 = |E_\omega^0|^2 e^{-\frac{2z}{c}\sqrt{\omega_{pl}^2 - \omega^2}} \quad \text{für } \omega < \omega_{pl}$$

Trotzdem keine Wärmeerzeugg. mitgerechnet werden, würden sich Wellen mit $\omega < \omega_{pl}$ in Metallen nicht ausbreiten können, denn sie werden exponentiell gedämpft. Die Energie des Lichts wird umgewandelt in kollektive Plasmaoszillation des Elektronengases „Plasmonen".

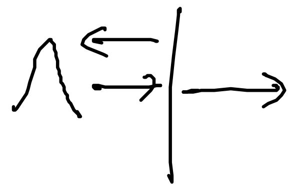
Oberhalb der Plasmafrequenz ist das Elektronengas durchsichtig.

---

bisher: $\chi(\omega)$ ermittelt und gefragt wie sich Licht im Medium ausbreitet



eigentlich gesucht:



im Experiment

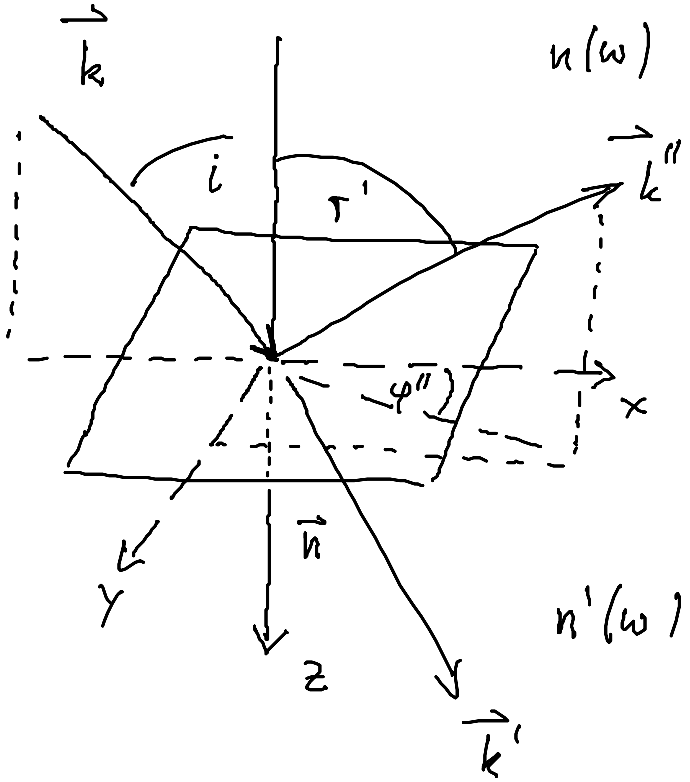
4. Feldausbreitung durch eine Grenzfläche

Ziel: Herleitung der Fresnelschen Formeln die Transmission / Reflexion als Funktion von ω, γ, n_0 usw beschreiben

$\longrightarrow$ Bestimmung z.B. von γ $\to$ aktuelles Gebiet

Anwendung: photonische Kristalle u.v. mehr.

4.1. Folgerungen aus Stetigkeit der Felder



Zeigen des Felds nach ebenen Wellen an Schnittstelle von $n'(\omega)$ und $n(\omega)$

$z = 0$ Ebene

$\vec{n}$ Normalenvektor

bei $z=0$ sind Normalen bzw Tangentialkomponente stetig $(X^{\prime\prime}_{\prime\prime})$

$$\rightarrow X_1 = X_2 \Big|_{z=0}$$

<u>Ansatz</u>: $X_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + X_0'' e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{r} - \omega'' t)} = X_0' e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r} - \omega' t)} \Big|_{z=0}$

diese Bedingungen gelten $\forall$ Orte in der Ebene u. alle Zeiten

$\longrightarrow$ Ort und Zeit müssen rausfallen

<u>1. Folgerung</u>: $\omega = \omega' = \omega''$

Reflexion und Brechung ändern die Trägerfrequenz nicht

$\omega = \omega'' : \; c_n k = c_n k'' \rightarrow k = k''$

<u>2. Folgerung</u>: $\vec{k}\cdot\vec{r} = \vec{k}''\cdot\vec{r}$

$\vec{k} = (k\cos\varphi\sin\vartheta, k\sin\varphi\sin\vartheta, k\cos\vartheta)$ in Kugelkoord.

$\angle(\vec{k}, z) = i \;, \; \varphi = 0$

$\vec{r} = (x, y, z)$ mit $z = 0$

$$k x \cos(0) \sin(i) + k y \sin(0) \sin(i)$$

$$= k'' x \cos\varphi'' \sin(\pi - r') + k'' y \sin\varphi'' \sin(\pi - r')$$

$$\boxed{\rightarrow x \sin i + 0 = x \cos\varphi'' \sin r' + y \sin\varphi'' \sin r'}$$

$\rightarrow \sin\varphi'' = 0,\ \varphi'' = 0\ \forall y,$ $\cos(0) = 1\ \forall x$

also $\sin(i) = \sin(r')$,

muß unabhängig von x, y gelten

Damit ergibt sich das <u>Reflexionsgesetz</u>:

(i) eingestrahlter u. reflektierter Strahl sind in einer Ebene $(\varphi'' = 0)$

(ii) Einfalls und Reflexionswinkel sind gleich $i = r'$.