3. Folgerung: $\vec{k}\cdot\vec{r} - \vec{k}'\cdot\vec{r}$ analoge Rechnung, ohne Beweis

$\varphi'=0$, $k \sin(i) = k' \sin(r) \longrightarrow \dfrac{\sin(i)}{\sin(r)} = \dfrac{c_n}{c_{n'}} = \dfrac{n'}{n}$

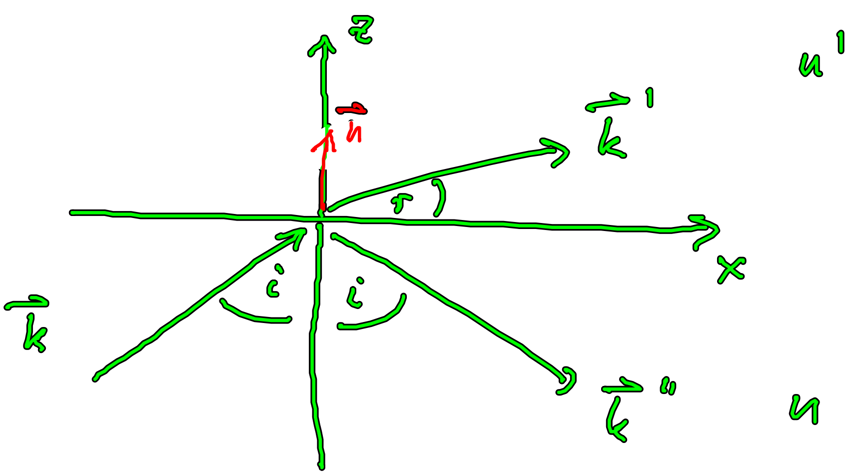
(i) Sinus von Einfalls und Brechungswinkel verhalten sich umgekehrt wie die Brechzahlen der Medien

(ii) φ' als Polarwinkel des $\vec{k}'$ Vektors gewählt $\longrightarrow$ $\vec{k}, \vec{k}'$ liegen in einer Ebene

$\Rightarrow$ $\vec{k}, \vec{k}', \vec{k}''$ liegen in einer Ebene

= erhebliche Vereinfachung

4.2. Ableitung der Fresnelschen Formeln



weil $\vec{k}', \vec{k}''$, und $\vec{k}$ in einer Ebene liegen

<u>eingestrahlt</u> | <u>gebrochen</u> | <u>reflektiert</u>

$$E = E_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \qquad E' = E_0'\, e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r} - \omega' t)} \qquad E'' = E_0''\, e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{r} - \omega'' t)}$$

(Phasen müssen gleich sein an GF ($z=0$)
weil Grenzbedingungen $\forall$ Punkte in der Ebene zu allen Zeit gelten müssen, kann man das Gleichungssystem f. die stetigen Felder nur erfüllen, wenn Ort, Zeit herausfallen (Folgerung (1-3)), ansonsten überbestimmt.)

aus Maxwellgl. $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$

$$i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \qquad (\omega = c_{n^{(\prime)}} k \text{ im Medium } n^{(\prime)})$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{c_{n^{(\prime)}} k} \times \vec{E}$$

mit $c_n^2 k^2 = \omega^2$ | $c_{n'}^2 k'^2 = \omega'^2$ | $c_n^2 k''^2 = \omega''^2$

$\vec{B} = \frac{1}{c_n} \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}$ | $\vec{B}' = \frac{1}{c_{n'}} \frac{\vec{k}'}{k'} \times \vec{E}'$ | $\vec{B}'' = \frac{1}{c_n} \frac{\vec{k}''}{k''} \times \vec{E}''$

- uns interessiert Verhältnis von $\frac{E_0'}{E_0}$, $\frac{E_0''}{E_0}$

  wieviel wird gebrochen bzw. reflektiert?

- man kann jedes E-Feld in $\vec{k}$-Richtg. in 2 $\perp$ Vektoren zerlegen: Wahl der beiden Richtungen?

(i) Definition der Einfallsebene, wird zwischen $\vec{k}$ und $\vec{n}$ aufgespannt

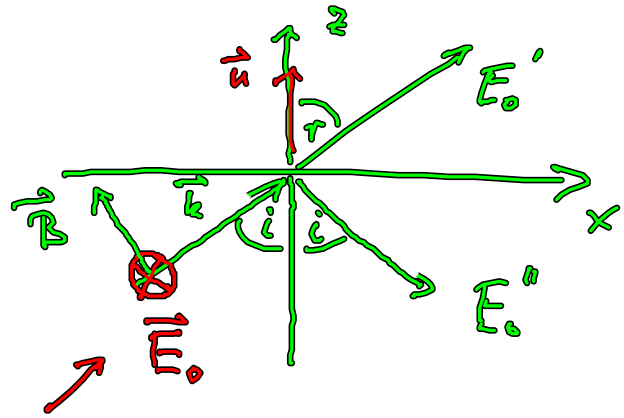
(ii) Polarisation des E-Felds $\perp$ EFE (s polarisiert)

(iii) Polarisation des E-Felds // zur EFE

(p polarisiert)

→ Allgemein Fall durch Superposition von (ii), (iii)

<u>s polarisiert</u>



EFE = x, z Ebene

senkrecht polarisiert zur Einfallsebene

$\vec{B}$ kann dann berechnet werden, weil $\perp$, $\vec{k}$, $\vec{E}$

<u>Tangentialkomponente Stetigkeit d. $\vec{E}$-Felds:</u>

$$(\vec{E}_0 + \vec{E}_0'') \times \vec{n} = \vec{E}_0' \times \vec{n}$$

$\vec{E}$, $\vec{n}$ stehen alle $\perp$ aufeinander, nach Kreuzprodukt

$$\boxed{E_0 + E_0'' = E_0'} \quad *$$

<u>Tangentialkomponente Stetigkeit von $\vec{H}$-Feld:</u> $B = \mu \mu_0 H$

$$(\vec{H}_0 + \vec{H}_0'') \times \vec{n} = \vec{H}_0' \times \vec{n} \qquad (H \sim B \sim E)$$

$$\frac{1}{\mu}\left(\vec{k}\times\vec{E}_0+\vec{k}''\times\vec{E}_0''\right)\times\vec{n}=\frac{1}{\mu'}\left(\vec{k}'\times\vec{E}_0'\right)\times\vec{n}$$

(siehe oben)

mit $n\times(\vec{k}\times\vec{E}_0)=\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{E}_0)}\vec{k}-(\vec{n}\cdot\vec{k})\vec{E}_0$

$= 0$, s-polarisiert $\perp$ EFE

$$\frac{1}{\mu}\underline{\underline{(\vec{n}\cdot\vec{k})}}\vec{E}_0+\frac{1}{\mu}(\vec{n}\cdot\vec{k}'')\vec{E}_0''=\frac{1}{\mu'}(\vec{n}\cdot\vec{k}')\vec{E}_0'$$

$**$

$$\boxed{\frac{k}{\mu}\cos(i)E_0+\frac{k''}{\mu}E_0''\cos(\pi-i)=\frac{k'}{\mu'}E_0'\cos(r)}$$

r noch über Brechungsgesetz berechnen:

$***$

$$\frac{\sin r}{\sin i}=\frac{n}{n'}\rightarrow\boxed{\cos(r)=\sqrt{1-\left(\frac{n}{n'}\sin(i)\right)^2}}$$

$*$, $**$, $***$ $\rightarrow$ sind 3 Gleichungen

für 3 Unbekannte: E_0', E_0'', r

bekannt: i, E_0

Amplitudenverhältnis bei Brechung:

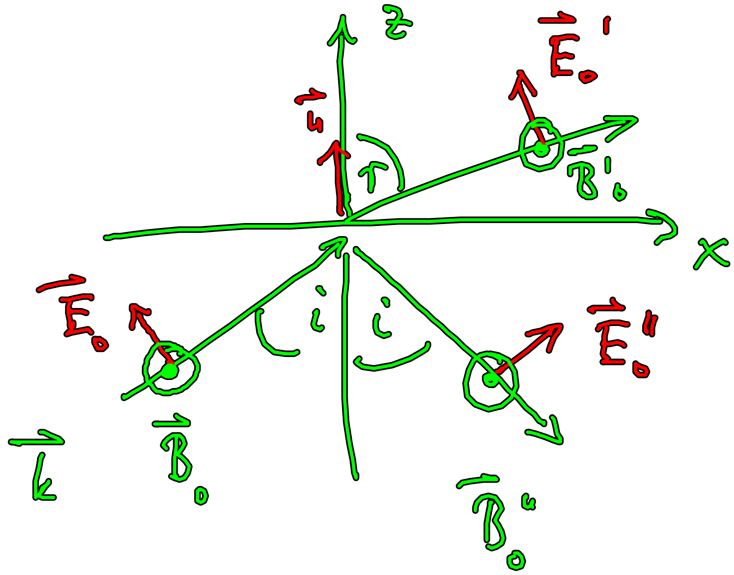
$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n\cos(i)}{n\cos(i) + \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2(i)}}$$

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{n\cos(i) - \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2(i)}}{n\cos(i) + \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2(i)}}$$

Damit ist man in der Lage, die reflektierte und die gebrochene Amplitude $E_0^{'('')}$ als Fkt. des Einfallswinkels und der Materialkonstanten zu berechnen.

p-Polarisation

Rechnung erfolgt analog



$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2nn'\cos(i)}{n'^2\frac{\mu}{\mu'}\cos(i) + n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2(i)}}$$

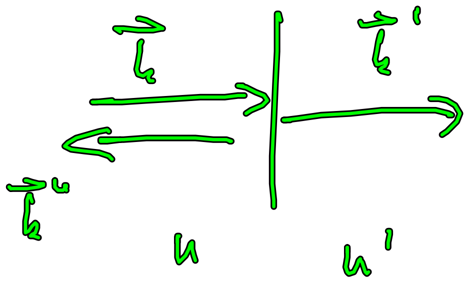
$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{n'^2\frac{\mu}{\mu'}\cos(i) - n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2(i)}}{\frac{\mu}{\mu'}n'^2\cos(i) + n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2(i)}}$$

$\Rightarrow$ man kann s, p getrennt berechnen und am Ende jedes beliebige Feld E', E'' durch Überlagerung von allen $\vec{E}$'s und allen s, p Anteilen berechnen.

Bemerkungen

a) Diese Formeln $\frac{E_0'^{('')}}{E_0} = \ldots$ heißen Fresnelsche Formeln.

b) Billigfall: $\vec{k}$ $\perp$ auf die Oberfläche



$i = 0$ $\Rightarrow$ $\mu = \mu'$, $n \neq n'$

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n}{n'+n}, \quad \frac{E_0''}{E_0} = \frac{n-n'}{n'+n}$$

?

wenn $n' > n$, so erfährt „E_0''" (reflektiertes Signal) einen Phasensprung, weil Vorzeichenwechsel $(-1 = e^{i\pi})$

c) umgekehrt können die Formeln angewendet werden um n' zu bestimmen aus Messung von eingestrahlten u. reflektierten Feld

d) <u>Brewsterwinkel</u>

p-polarisiertes Licht: $\exists$ Einfallswinkel für den es keine reflektierte Welle gibt; d.h. beliebige Polarisation kommt „immer" s-polarisiert zurück

$\longrightarrow$ nutzen um fest polarisierte Strahlung herzustellen p-Polarisation Fresnel Formeln: $\frac{E_0''}{E_0} = 0$ setzen

und die Gleichung nach $i = i_B$ (B-Brewster)

umstellen

$$n'^2 \cos(i_B) = n\sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2(i_B)}$$

muß nach i_B umgestellt werden

(quadrieren, $\alpha = \frac{n'}{n}$ einführen, α Gleichg. lösen)

$$\alpha^4 (1 - \sin^2(i_B)) = \alpha^2 - \sin^2(i_B)$$

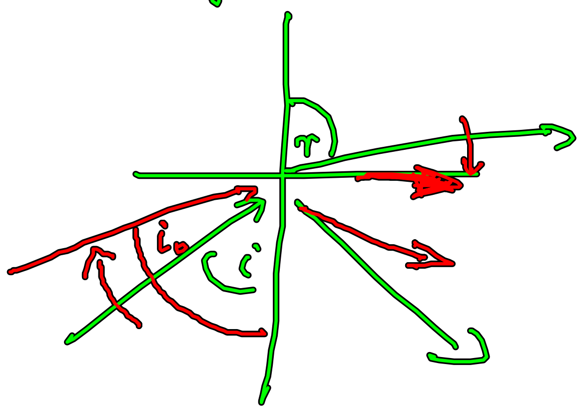
+ verwenden: $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arctg(x)$

$$\rightarrow i_B = \arctg(\alpha) = \arctg\left(\frac{n'}{n}\right)$$

optische Frequenzen Glas/Luft-Übergang $\rightarrow i_B = 56°$

e) Totalreflexion (optisch dicht → dünn)

Brechung $n > n'$, $r > i$ (Brechungsgesetz)



$r = \frac{\pi}{2}$ $\hat{=}$ Totalreflexion, wie bestimmt man i_0 als Grenzwinkel der Totalreflexion

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{n}{n'} \longrightarrow \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin i_0} = \frac{n}{n'}$$

$$\sin(i_0) = \frac{n'}{n}$$ (Luft/Glas $\rightarrow i_0 = 42°$)

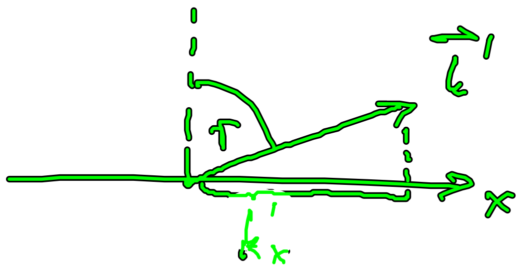
Achtg.! Alles von $n(\underline{\underline{\omega}})$, $n(\underline{\underline{\omega}})$,

also frequenzabhängig!

bei Totalreflexion läuft an der Grenze ein

„evaneszente“ Welle entlang

gebrochener Strahl: $e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}'} = e^{i(k_x'\cdot x + k_z' z)}$



$$k_x' x = k'\cos\left(\frac{\pi}{2}-r\right)x = k'\sin(r)x$$

$$k_z'\cdot z = k'\cos(r)\,z$$

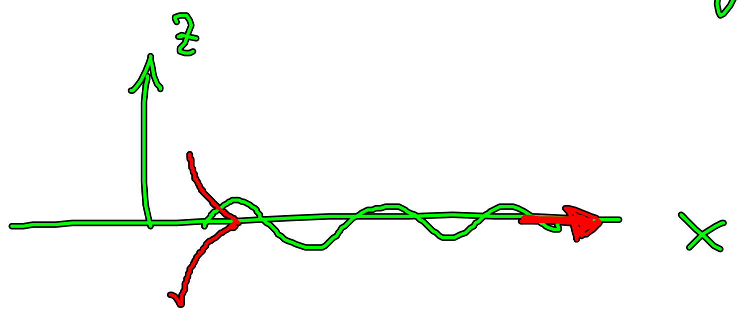
$$e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}} = \underbrace{e^{ik'x\frac{\sin(i)}{\sin(i_0)}}}_{\text{siehe oben}}\; e^{ik'z\underbrace{\sqrt{1-\frac{\sin^2(i)}{\sin^2(i_0)}}}}$$

$$\left(\frac{\sin(i)}{\sin(i_0)}\right)^2 \geq 1$$

oberhalb oder gleich $\measuredangle$ der Totalreflexion einsetzen

$$e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}} = e^{ik'x\frac{\sin(i)}{\sin(i_0)}}\; e^{-k'z\underbrace{\sqrt{\frac{\sin^2(i)}{\sin^2(i_0)}-1}}_{\text{reell}}}$$

Die gebrochene Welle läuft demnach entlang der x-Achse, ist aber in z-Richtung exponentiell gedämpft:



Die Welle ist in einer dünnen Schicht um die Grenzfläche lokalisiert und breitet sich entlang der Grenzfläche aus.

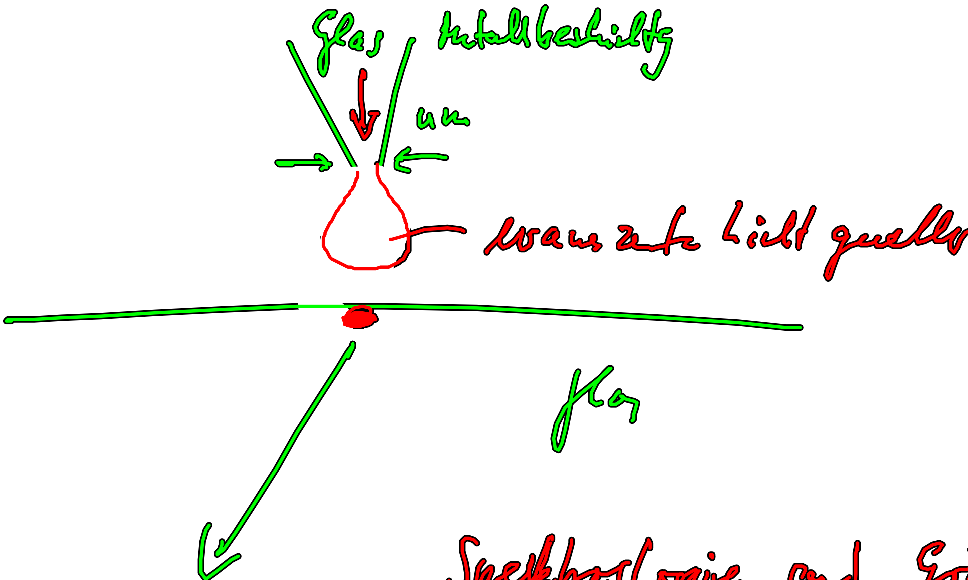
Exponentielles Abklingverhalten bei Wellen wird als evaneszent bezeichnet.

Die gesamte Intensität wird reflektiert:

$$\frac{E_0''}{E_0} = |i - i_0| = 1$$

<u>Bemerkung</u>: Abklingen findet typischerweise auf Längenskala $\ell \sim \lambda$ statt,

Optik in diesem Bereich heißt „Nahfeldoptik"



Spektroskopie auf Größenordng. unterhalb der Wellenlänge

5. Metallische und dielektrische frequenzabhängige Reflexion

$\perp$ Einfall $\quad n' = 1 \quad$ | Metall / Dielektrik $\; n$

$$R = \left| \text{Reflexions-koeffizient} \right| = \left| \frac{1-n}{1+n} \right|^2 = \left| \frac{E_0''}{E} \right|^2$$

messen

$$R = R(\omega)$$

Modell f. $n(\omega)$ aus letzter VL:

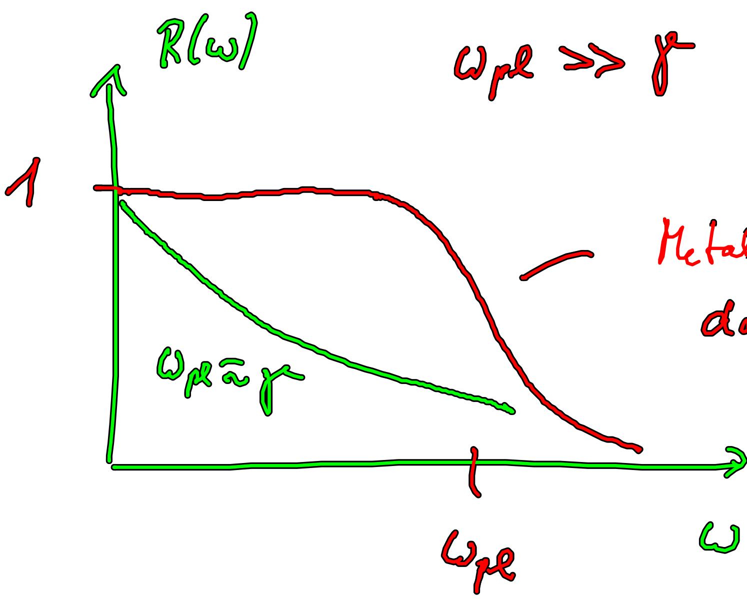
$$n(\omega) = \left(1 + \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}\right)^{1/2}$$

Rückstellkraft Dämpfg.

$= 0$, Metall $\neq 0$, Dielektrikum

Metalle:

Plot in HA

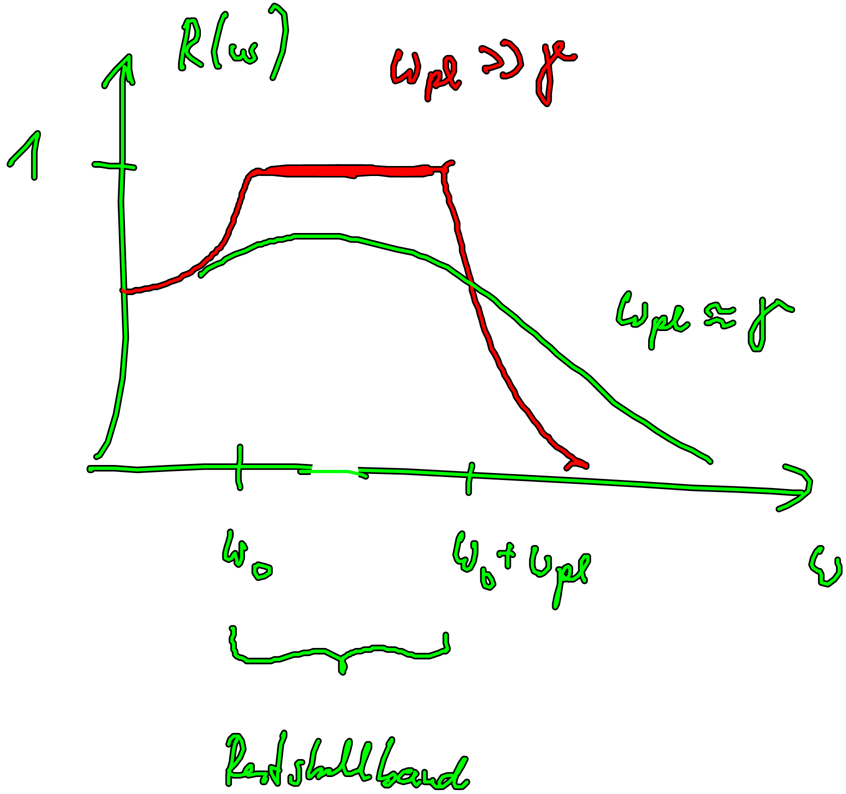


Metall transparent für $\omega > \omega_{pl}$
darunter sorgt Plasmon dafür
daß sich Licht nicht aus-
breiten kann, sondern
reflektiert wird.

Spektraler Filter ! (Kante)

HA

Dielektrika



Es existiert ein Bereich in dem keine Ausbreitg. mögl. ist, weil alles reflektiert wird („Reststrahlbande")