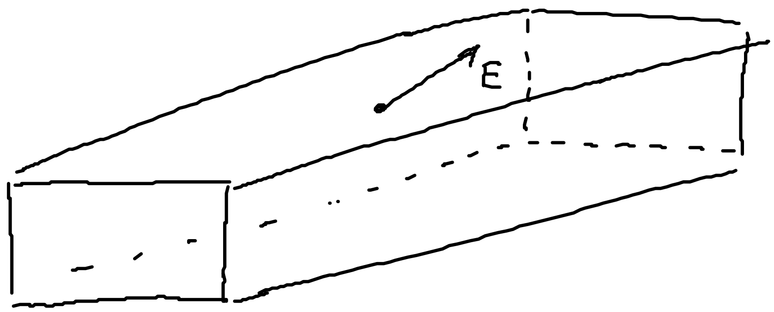
3. Resonatoren und Wellenleiter

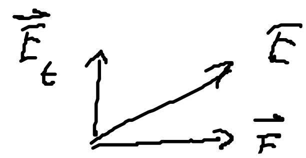
Ausbreitung von Wellen in strukturierten Systemen



innen:

$\mu_0 \mu_r = \bar{\mu}$

$\varepsilon_0 \varepsilon_r = \bar{\varepsilon}$



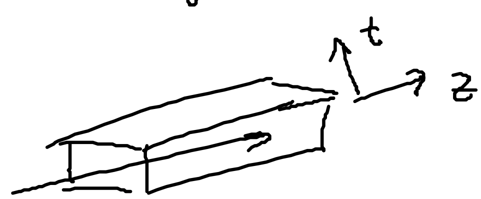
Rand: ideale Metall

2 Fälle: a) ohne Endflächen: Wellenleiter (Führung)

b) mit Endflächen: Resonator (Speicherung)

wir lösen die Maxwellgl. mit Randbedingungen im Hohlraum

$$\vec{E} = E_z \vec{e}_z + \vec{E}_t$$



z wird später im Wellenleiter Propagationsrichtg.

Start von homogen Maxwellgleichungen mit ε, μ:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -i \frac{\omega}{c^2} E \quad , \quad c^2 = \frac{1}{\bar{\varepsilon} \bar{\mu}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad + \text{Randbedingg.}$$

<u>Ziel</u>: einige der 6 Vektorkomponenten durch andere ausdrücken um so die Komplexität zu reduzieren

$$\vec{e}_z E_z = \vec{e}_z \quad \vec{E} \cdot \vec{e}_z$$

Darstellg der Komponente $E_z \vec{e}_z$, $\vec{E}_t$

$$\vec{E}_t = \vec{E} - \vec{e}_z E_z$$

$$= \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \vec{E} - \vec{e}_z (\vec{e}_z \cdot \vec{E})$$

$$\vec{E}_t = (\vec{e}_z \times \vec{E}) \times \vec{e}_z$$

zerlege die Maxwellgl. in die beid Komponente:

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_t + \vec{e}_z \partial_z \quad , \quad \vec{\nabla}_t = (\partial_x , \partial_y , 0)$$

<u>Bsp</u>: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t + \partial_z E_z$

$$\vec{E}_t = (E_x, E_y, 0)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega \vec{B}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} = i\omega \vec{B}$$

z-Komponente:

$$\vec{e}_z \left(\partial_x E_y - \partial_y E_x\right) = i\omega B_z \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_z \; \vec{e}_z \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & 0 \\ E_x & E_y & 0 \end{pmatrix} = i\omega B_z \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_z \cdot \left(\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t\right) = i\omega B_z$$

<u>insgesamt:</u>

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t = -\partial_z E_z \; ; \; \vec{\nabla}_t \cdot \vec{B}_t = -\partial_z B_z \quad (\text{aus } \vec{\nabla}\cdot)$$

$$\underbrace{\vec{e}_z \cdot \left(\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t\right) = i\omega B_z \; ; \; \vec{e}_z \cdot \left(\vec{\nabla}_t \times \vec{B}_t\right) = -i\mu\varepsilon\omega E_z}_{}$$

z-Komponente der beiden Rotationsgleichungen

$$\underbrace{\partial_z \vec{E}_t + i\omega \vec{e}_z \times \vec{B}_t = \vec{\nabla}_t E_z \, ; \quad \partial_z \vec{B}_t - i\mu\varepsilon\omega \vec{e}_z \times \vec{E}_t = \vec{\nabla}_t B_z}$$

t-Komponente der Rotationsgleichg.
(durch multiplizieren $\vec{e}_z \times$)

weiteres Vorgehen beruht auf der Situation die man betrachten möchte:

1) Wellenleiter: Ansatz mit $e^{\pm i k_z z}$ (laufende Welle)

2) Resonator: Ansatz mit $\cos(k_z z)$, $\sin(k_z z)$
(stehende Welle)

für alle Felder

3.1. Wellenleiter: Ausbreitung von Wellen

Ausbreitg. in positive z-Richtung: $+$

$\forall$ Felder:
$$E = \underline{E}(x,y)\, e^{i k_z z}$$
$$B = \underline{B}(x,y)\, e^{i k_z z}$$

Ansatz einsetzen, umstellen nach $\underline{B}_t$, $\underline{E}_t$

$$\vec{\underline{E}}_t = \frac{i}{\bar{\mu}\bar{\varepsilon}\omega^2 - k_z^2} \left(k_z \vec{\nabla}_t \underline{E}_z - \omega \vec{e}_z \times \vec{\nabla}_t \underline{B}_z \right)$$

Die Berechnung des transversalen Anteils ist damit auf die Berechnung der skalaren Felder $\underline{E}_z(x,y)$, $\underline{B}_z(x,y)$ zurückgeführt.

→ großer Vorteil im Vergleich zu den vollen Maxwellgl.

$$\vec{\underline{B}}_t = \frac{i}{\bar{\mu}\bar{\varepsilon}\omega^2 - k_z^2} \left(k_z \vec{\nabla}_t \underline{B}_z + \bar{\mu}\bar{\varepsilon}\omega \vec{e}_z \times \vec{\nabla}_t \underline{E}_z \right)$$

man kann jetzt 2 Probleme lösen und dann überlagern:

1) $\underline{B}_z = 0$ <u>T</u>ransversal <u>m</u>agnetische Welle <u>TM</u>

2) $\underline{E}_z = 0$ <u>T</u>ransversal <u>e</u>lektrische Welle <u>TE</u>

Gesamtlösung als Überlagerung beider

Schema z. Lösung

1) man bestimmt $\underline{E}_z$ (TM) bzw $\underline{B}_z$ (TE) aus der Wellengleichung:

$$\text{TM}: \Box E_z = 0 \longrightarrow \Big(\underbrace{\Delta_t}_{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}} + \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\Big)\underline{E}_z = 0$$

wird mit RB gelöst (B-analog)

2) man rechnet aus $\underline{E}_z$ die Komponenten $\underline{\vec{E}}_t$, $\underline{\vec{B}}_t$ aus

3) man ist fertig

Randbedingungen:

TM-Mode: $\underline{B}_z = 0$ gefordert, auch auf Rand

Transversalkomponente E-Feld ist stetig:

$$\vec{n} \times \vec{E}\Big|_{\text{Rand}} = 0$$

$$\vec{n} \times \left(\vec{e}_z \underline{E}_z + \underline{\vec{E}}_t \right)_{\text{Rand}} =$$

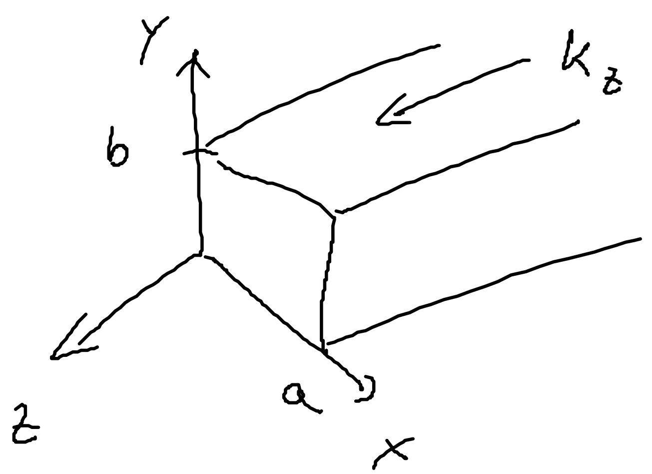
$$\vec{n} \times \left(\vec{e}_z \underline{E}_z + \frac{i}{\bar{\mu}\bar{\varepsilon}\omega^2 - k_z^2} k_z \vec{n} \times \vec{\nabla}_t \underline{E}_z \right)_{\text{Rand}} \overset{!}{=} 0$$

$\rightarrow \underline{E}_z \Big|_{\text{Rand}} = 0$ erfüllt die RB!

<u>Beispiel:</u> rechteckiger Wellenleiter TM-Mode

1) $\underline{E}_z$ besorgen

$$\left(\Delta_t + \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \underline{E}_z = 0, \quad \underline{E}_z \Big|_{\text{Rand}} = 0$$



∞ ausgedehnt

$\vec{k}_t = (k_x, k_y)$

$\vec{r}_t = (x, y)$

a) Lsg. der Wellengleichung: $e^{\pm i \vec{k}_t \cdot \vec{r}_t}$

als Ansatz verwenden $\rightarrow$

$$k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2$$

b) Wann erfüllen diese Lösungen die Randbedingungen? $e^{\pm i \vec{k}_t \cdot \vec{r}_t} \rightarrow$ cos um RB zu sin erfüllen.

$$\underline{E}_z = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y)$$

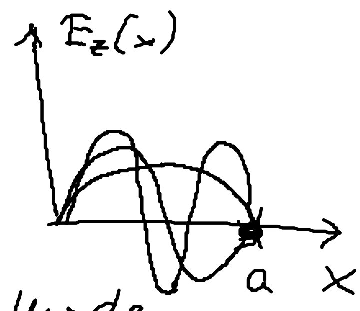
damit Dimension stimmt u. Stärke des E Felds

k_x, k_y müssen so gewählt werden, daß RB erfüllt sind:

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}$$

$$m, n = 1, 2, 3, \ldots$$

m, n nummerieren die verschieden mögl. Lösungen des Felds im Wellenleiter



diese Lösungen nennt man Wellenleitermoden

(zur Info: vollständiges System)

Dabei muß die Dispersionsrelation erfüllt werden:

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2$$

Medium

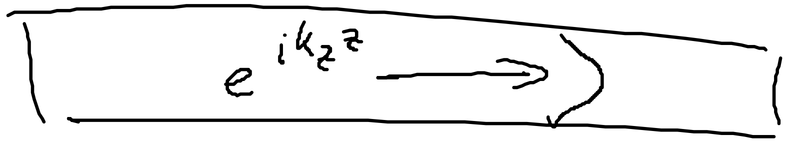
$$= \frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$$

Das ist nicht die Dispersionsrelation des Vakuums, kriegt man nur f. $a, b \Rightarrow \infty$.

$k_z(\omega, n, m)$: k_z wird festgelegt durch die Wahl von ω, n, m

Diskussion der Dispersion:

$$k_z = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\right)^{1/2}$$



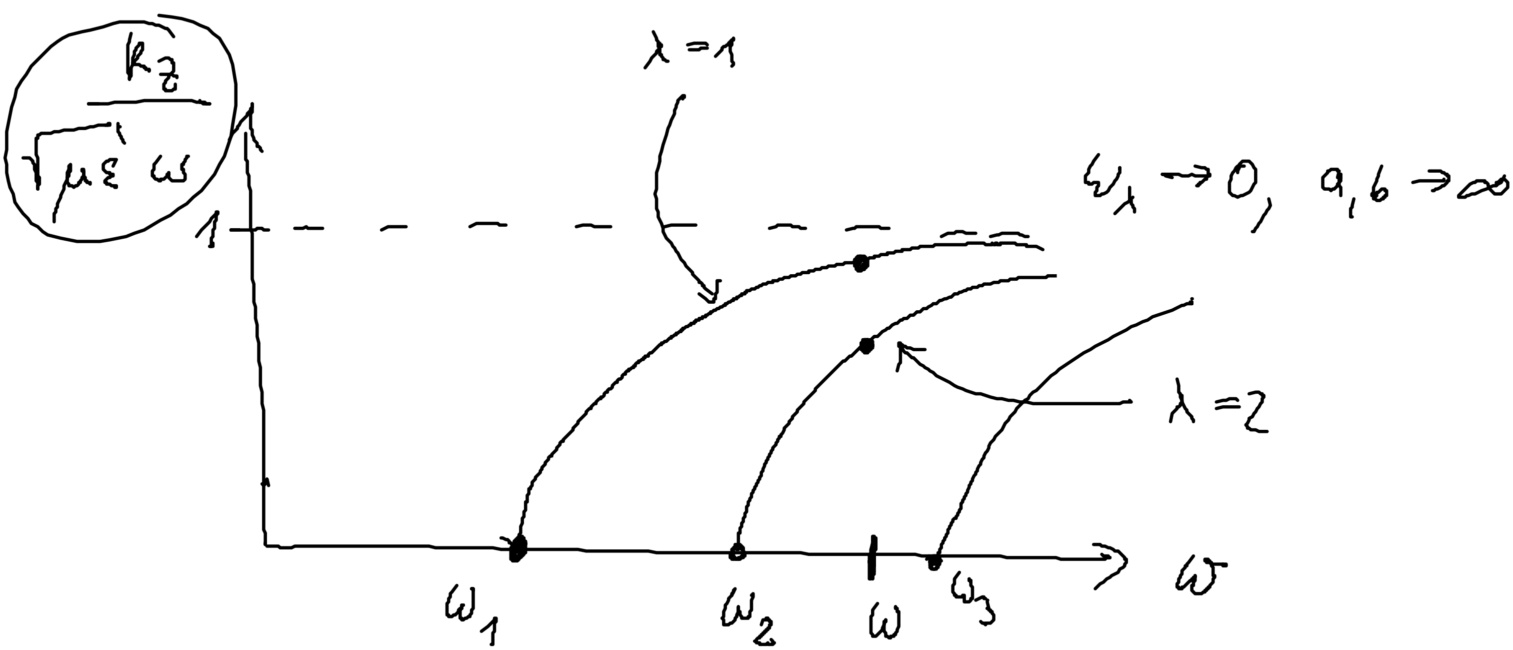
k_z muß reell sein damit die Lösung sich auch ausbreiten kann, sonst

$$e^{ik_z z} = e^{i i |k_z| z} = e^{-|k_z| z}$$

$\longrightarrow$ bei imaginären k_z keine Ausbreitg

Die Abschneidefrequenz ω_{cut} unter der eine Ausbreitung f. eine feste Mode n, m = fest nicht mögl. ist gegeben durch

$$\frac{\omega_{cut}^2}{c^2} = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$$



$$\lambda = (n, m), \quad k_z(n,m) = k_z = \sqrt{\mu\varepsilon}\,\omega\sqrt{1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}}$$

$$\frac{k_z}{\sqrt{\mu\varepsilon}\,\omega} = \sqrt{1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}}$$

- für eine feste Frequenz ω die der Wellenleiter übertragen soll (von außen „angeboten")
  können sich nur eine endliche Zahl von Moden ausbreiten

- Wenn man nur 1 Mode will → Design von a, b
  a, b sollten dann möglichst klein sein

- $\omega \to \infty$: dort findet man immer
  die Dispersion ohne Wellenleiter
  (Vakuum bzw ε, μ)

2) (2. Lösungsschritt)

$$\underline{\vec{E}}_t = \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2}\, k_z \vec{\nabla}_t \underline{E}_z(x, y)$$

$\vec{E}_t$

TM, $B_z = 0$

$$\vec{E}(x,y,z)_{TM} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{i e^{i k_z z}}{k_x^2 + k_y^2} k_z E_0 \begin{pmatrix} k_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) \\ k_y \cos(k_y y) \sin(k_x x) \end{pmatrix} \\[2ex] E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y)\, e^{i k_z z} \end{cases}$$

fest(ω,a,b)

fest (a,b)

Damit sind die 3 Vektorkomponenten des E-Felds (TM) im Wellenleiter festgelegt.

k_z genügt der Dispersionsrelation und kann bei bekannten $\varepsilon, \mu, \omega, a, b$ berechnet werden.

Das Einkopplungsproblem (welche Moden schwingen an) ist damit noch nicht gelöst.

3.2. Resonatoren

Unterscheidung zu Wellenleitern erfolgt mit Hilfe des Ansatzes f. $E = \underline{E}\, \cancel{e^{ik_z z}}\; A \sin(k_z z) + B \cos(k_z z)$

Damit werden stehende Welle beschrieben die jetzt die RB an den Endflächen befriedigen müssen.

TM-Felder: $E_z \Big|_{Rand} = 0$

$$\vec{E}_t \Big|_{Rand} = 0$$

aus $\vec{n} \times \vec{E} \Big|_{Rand} = 0$

$$\vec{E}_t = \vec{A} \sin(k_z z) + \vec{B} \cos(k_z z)$$

$$\vec{E}_t(z=0) = \vec{B} \overset{!}{=} 0 \implies \vec{B} = 0$$

$$\vec{E}_t(z=d) = \vec{A} \sin(k_z d) \overset{!}{=} 0$$

d = Länge des Resonators in z-Richtung

$$k_z = p\frac{\pi}{d} \qquad p = 1, 2, 3 \ldots$$

$$\vec{E}_t = \vec{A} \sin\left(p\frac{\pi}{d} z\right)$$

$$E_z = E_0 \sin(k_x x)\sin(k_y y)\,\cancel{e^{ik_z z}}\,\sin\left(p\frac{\pi z}{d}\right)$$

$$\vec{E}_t = \frac{k_z E_0}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \sin\left(p\frac{\pi z}{d}\right)\begin{pmatrix} k_x \cos(k_x x)\sin(k_y y) \\ k_y \cos(k_y y)\sin(k_x x)\end{pmatrix}$$

Dispersionsrelation:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 + \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$$

ist eine Bestimmungsgleichung für die Frequenz der Strahlung die in einem Resonator gespeichert werden kann.