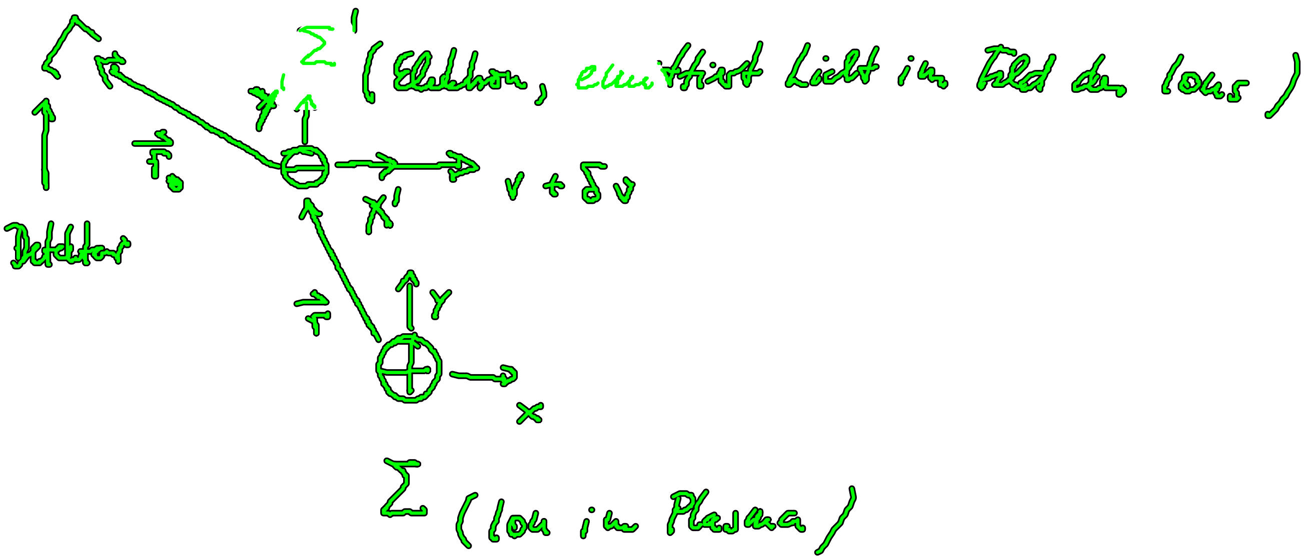
Beispiel f. Feldtransformation in relativistischer Theorie:

Temperatur von astrophysikalischen und Fusionsplasmen



bewegtes Elektron hat Geschwindigkeit v aufgrund thermischer Bewegung $\frac{m}{2} v^2 \simeq \frac{3}{2} kT$ (statistische Mechanik).

δv wird durch die Bewegung im Ionfeld induziert

Frage: Kann man aus dem Spektrum der emittierten Strahlung $E_{Stra}(\vec{r}_0)$, also aus $E_{Stra}(\omega)$ die Temperatur bestimmen?

$$E_{Stra}(\omega) \sim -i\omega \underbrace{\int d^3r' \, \delta j^{\perp}(\vec{r}\,')}\; \frac{e^{i\omega(t - \frac{r_0}{c})}}{r_0}$$

Fernfeld Ändrg. durch δv erzeugt Strom δj, dessen transversaler Anteil das Fernfeld treibt

1 Punktladung bei $\vec{r}\,' = 0$

$$\delta j^{\perp} = q\,\delta v\,\delta(\vec{r}\,')$$

Ändrg. Deltafunktion

$$= -i\omega\, q\,\delta v\,\frac{e^{i\omega(t-\frac{r_0}{c})}}{r_0}$$

zur Vereinfachg. Newton-gesetz

$$\delta\dot{v} = \frac{q}{m} E'(\vec{r}\,'=0)$$

$$= \frac{q^2}{m} E'(\omega, \vec{r}\,'=0)\,\frac{e^{i\omega(t-\frac{r_0}{c})}}{r_0}$$

E' in Σ' kann über E in Σ ausgedrückt werden, d.h.:

Ladungszahl

$E'_x = E_x = \frac{Zq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{r^3}$

aus Trafo aus letzter VL

Feld des Ions als Punktladung

$\Sigma: r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$E'_y = \gamma E_y = \gamma \frac{Zq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{y}{r^3}$

$E'_z = \gamma E_z = \gamma \frac{Zq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{r^3}$

brauchen alles in den Koordinaten von Σ'

$\vec{r} \to \vec{r}\,'$

Umrechng. der Koordinaten: $v \gg \delta v$

$x = \gamma(x' - vt')$, $y = b + y'$, $z = z' = 0$

minimaler Abstand v. El-Ion

brauche: $\vec{E}'(\vec{r}\,' = 0)$

$x = -\gamma v t'$, $y = b$, $z = 0$

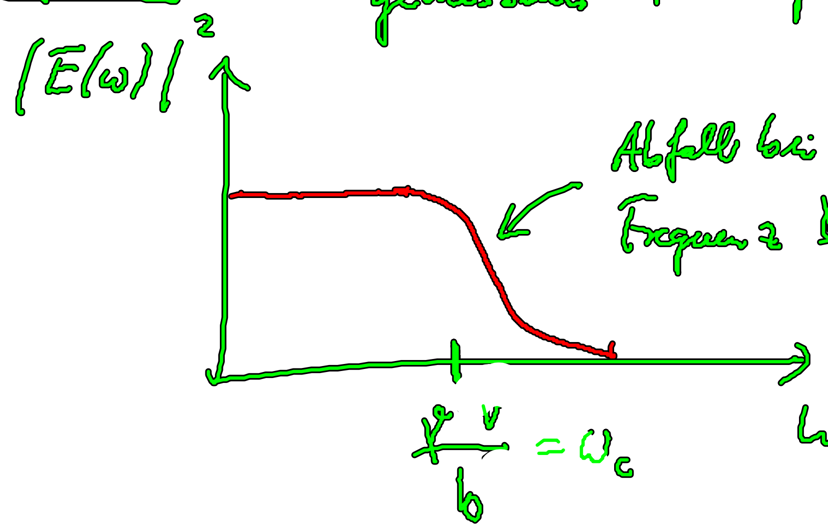
z.B

$$E'_x = \frac{Zq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-\gamma v t'}{(\gamma^2 v^2 t'^2 + b^2)^{3/2}}$$ usw

aus $E_x'(t') \rightarrow E_x'(\omega)$

durch Fouriertrafo, führt auf Besselfunktionen

Ergebnis: gemessenes Powerspektrum



Abfall bei charakteristischer Frequenz $\frac{\gamma v}{b}$ wegen Fouriertheorem

Messung stellt die Abschneidefrequenz fest

$\omega_c = \omega_c(T)$ über $\frac{m}{2} v^2 = \frac{3}{2} kT$

Temperaturbestimmung

X Semiklassische Theorie der Licht-Materie WW

semiklassisch: Materie: Quantentheorie
Licht: klassisch

bestes Konzept: eigentlich 2. Quantisierung, machen etwas einfacheren Zugang, allerdings kleine didaktische Lügen

Wahrscheinlichkeitsdichte :

$$\rho = q\, \Psi^*(r,t)\, \Psi(r,t)$$

→ Ladungsdichte in der Elektrodynamik (q – Ladg.)

$$\Psi(r,t) = \sum_n c_n(t)\, \varphi_n(\vec{r})$$

ist eine Entwicklg nach einem vollständigen System $\varphi_n(\vec{r})$

$$\underline{H} = \underline{H}_0 + \underline{H}_{El-Feld}$$

Wechselwirkg. El – Licht

Elektron im Atom.
(Kernpotential + kinet. Energie des Elektron)

$$\underline{H}_0\, \varphi_n = E_n\, \varphi_n$$ (z.B. Lösungen des H-Atom
$n \to$ Quantenzahlen n, l, m)

$$\rho(r,t) = q \sum_{n,n'} c_n^*(t)\, c_{n'}(t)\, \varphi_n^*(\vec{r})\, \varphi_{n'}(\vec{r})$$

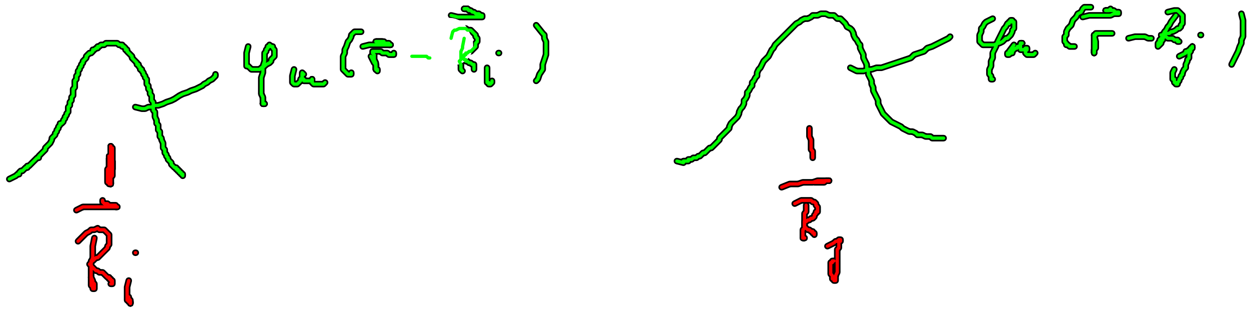
um Wellenausbreitg : Dipoldichte $\to \chi(\omega)$,

um die zu gewinnen brauchen wir makroskopische Mittlg.

$$\langle \rho(r,t)\rangle = q \sum_{nn'} c_n^*(t)\, c_{n'}(t) \int d^3r'\, g(\vec r-\vec r')\, \varphi_n^*(\vec r')\, \varphi_{n'}(\vec r')$$

Mittlungsfunktion

beschränken uns auf gebundene Elektronen in Atomen



i-te Atom

R_i – Kern

$$\langle \rho\rangle = q \sum_{nn'} c_n^*(t)\, c_{n'}(t) \int d^3r'\, g(\vec r-\vec r') \sum_i \varphi_n^*(\vec r'-\vec R_i)\, \varphi_{n'}(\vec r'-\vec R_i)$$

Summe über alle atomaren Systeme

$$\vec r\,' \to \vec r\,' + \vec R_i$$

$$= q \sum_{n,n',i} c_n^*(t)\, c_{n'}(t) \int d^3r'\, g(\vec r-\vec r\,'-\vec R_i)\, \varphi_n^*(\vec r\,')\, \varphi_{n'}(\vec r\,')$$

über die stark lokalisierte Stelle für $\varphi_n(\vec r\,')$

ist $g(\ldots \vec r\,')$ schwach veränderlich

$\longrightarrow$ Taylorreihe von g nach $\vec r\,'$

$$\approx q \underbrace{\sum_i \sum_m |c_m|^2}_{1} g(\vec{r}-\vec{R}_i) \xrightarrow{0.\,\text{Term}} q \sum_i g(\vec{r}-\vec{R}_i)$$

Ladungsdichte der Elektronen

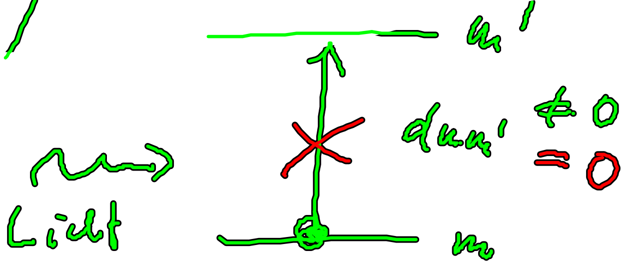
Term verschwindet wenn Ionen auch gemittelt werden

$$-q \sum_{mm'i} c_m^*(t)\, c_{m'}(t) \underbrace{\int d^3r'\, \varphi_m^*(\vec{r}')\, \vec{r}'\, \varphi_{m'}(\vec{r}')}_{\text{Dipolmoment}} \cdot \vec{\nabla}_r\, g(\vec{r}-\vec{R}_i)$$

$$\xrightarrow{1.\,\text{Term}}$$

$$\langle \rho \rangle = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r},t)$$

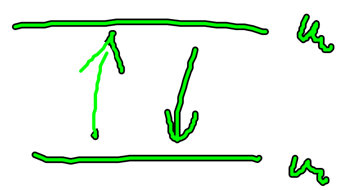
Die gemittelte Ladungsdichte wird durch die Divergenz der Dipoldichte $\vec{P} = \sum_{mm'i} c_m^*(t)\, c_{m'}(t)\, \vec{d}_{mm'}\, g(\vec{r}-\vec{R}_i)$ gegeben. Dipolmoment wird als Übergangsamplitude zwischen 2 Zuständen m, m' definiert mittels $\vec{r}'$ (Dipoldefinition)



$c_m^*(t)\, c_{m'}(t)$ ist noch unbekannt.

$c_m^* c_m \longrightarrow$ Wahrscheinlichkeit Elektron in φ_m zu finden

$c_m^*(t)\, c_{m'}(t) \longrightarrow$ offenbar eine Übergangswahrscheinlichkeitsamplitude zwischen m, m'



dafür brauchen wir Gleichungen.

2. Bewegungsgleichungen f. die Übergangswahrscheinlichkeitsamplituden

El im externen Feld: Ladung und Potential

$$H_{El-Feld} = q\,\phi = -q\,\vec{r}\cdot\vec{E}(\vec{R}_i)\,;\quad \phi \text{ gewählt: } -\vec{r}\cdot\vec{E}(R_i)$$

ist die Störung, die Überlagerungen $c_m^* c_{m'}$ der stationären Zustände erzeugt, R_i ist die schwache Ortsabhängigkeit der Maxwellgleichungen

$i\hbar\dot{\Psi} = \underline{H}\,\Psi$, um $c_m(t)$ zu berechnen:

$\Psi = \sum_n c_n(t)\,\varphi_n(\vec r)$ einsetzen

$$i\hbar \sum_n \dot c_n(t)\,\varphi_n(\vec r) = \sum_n c_n(t)\,\underline{H}\,\varphi_n(\vec r) \quad \Big|\int d^3r\, \varphi_m^*(\vec r)$$

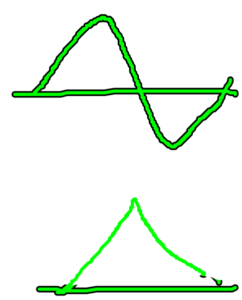
$$i\hbar\, \dot c_m(t) = \sum_n c_n(t)\, H_{mn}\,, \qquad H_{mn} = \int d^3r\, \varphi_m^*\, \underline{H}\, \varphi_n$$

$$\underline{H} = \underline{H}_0 + \underline{H}_{El\text{-}Feld}$$

$$H_{mn} = \int d^3r\, \varphi_m^*(r)\, H_0\, \varphi_n(r) - q \int d^3r\, \varphi_m^*(r)\, \vec r\, \varphi_n(\vec r)\cdot \vec E(\vec R_i)$$

$$= \varepsilon_n\, \delta_{nm} - \vec d_{mn}\cdot \vec E(R_i)$$

jetzt 2 Niveausystem:

ε_2  2 (2p)

ε_1 1 (1s)

$$i\hbar\, \dot c_2 = \varepsilon_2 c_2 - \vec d_{21}\cdot \vec E\, c_1$$

$$i\hbar\, \dot c_1^* = -\varepsilon_1 c_1^* + \vec d_{21}\cdot \vec E\, c_2 \qquad (d_{21}^* = d_{12})$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}\left(c_1^* c_2\right) = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, c_1^* c_2 - \vec d_{21}\cdot \vec E\, \left(c_1^* c_1 - c_2^* c_2\right)$$

damit kann $\vec{P}$ berechnet werden f. Maxwellgleichungen
aus einer Quantentheorie.

$$\vec{P} = \vec{P}\left(c_m^* c_{m'}, \vec{d}_{mm'}\right)$$

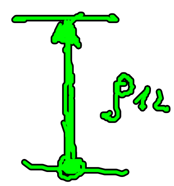
Gleichung „Blochgleichungen"

Dipolmomente sind bekannt, wenn H_0 bekannt (φ_m)

Theorie ist von gem. Größe abhängig.

$\underbrace{c_1^* c_2}_{\rho_{12}}$ $\hat{=}$ Übergangswahrscheinlichkeitsamplitude

ρ_{12} Maß f. Übergänge
(Überlagerungszustand)



Ist das Elektron auf dem Weg?

$\underbrace{c_i^* c_i}_{\rho_{ii}}$ $\hat{=}$ Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Zustand φ_i

ρ_{ii} wie hoch ist Wahrscheinlichkeit daß El in Zustand φ_i ist

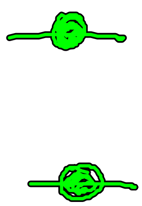
man muß auch Gleichungen f. ρ_{22}, ρ_{11} ableiten

Interpretation:

- Übergang ρ_{12} wird getrieben durch Term $\vec{d}_{21}\cdot\vec{E}\,(\rho_{11}-\rho_{22})$

E-Feld, erlaubt, wenn $\vec{d}_{21}\neq 0$

- $(\rho_{11}-\rho_{22})$ stellt die sogenannte **Inversion** $\Delta=\rho_{11}-\rho_{22}$ dar



$\Delta<0$ wenn Elektron eine höhere Wahrscheinlichkeit hat, im oberen gefunden zu werden

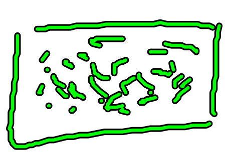
dieser Term ist **neu** u. quantenmechanisch

Um Resultate zu interpretieren sehen wir uns $\vec{P}$ an:

$$\vec{P}(\vec{r},t)=\sum_i \vec{d}_{12}\,\rho_{12}(t)\,g(\vec{r}-\vec{R}_i)+c.c.$$

alle Atome / Zwei-Niveau-Systeme sind gleich im Raum verteilt

$$\sum_i g(\vec{r}-\vec{R}_i)=\frac{N_0}{V}$$



$\frac{N_0}{V}=n_0=$ konstante Dichte

$$\vec{P}(\vec{r},t) = 2\,\mathrm{Re}\left(\vec{d}_{12}\; n_0\; \rho_{12}\right)$$

müssen berechnen

$$\underline{\underline{\dot{\rho}_{12}}} = -i\,\omega_{12}\,\rho_{12} + i\,\vec{d}_{21}\cdot\vec{E}\,(\rho_{11}-\rho_{22})$$

$$\omega_{12} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\hbar}$$

Kleine didaktische Lüge: $\left.\begin{matrix}\rho_{12}(t,\vec{r}) \\ \vec{E}(t,\vec{r})\end{matrix}\right\}$ kommt auch bei genauer Diskussion raus.

Aufteilung in Real und Imaginärteil:

$$\dot{\rho}^R_{12} = -\omega_{12}\,\rho^I_{12}\,, \quad \dot{\rho}^I_{12} = \omega_{12}\,\rho^R_{12} + \vec{d}_{21}\cdot\vec{E}\,\Delta$$

$$\rightarrow \ddot{\rho}^R_{12} = -\omega_{12}^2\,\rho^R_{12} - \omega_{12}\,\vec{d}_{21}\cdot\vec{E}\,\Delta$$

$$\ddot{\vec{P}} = -\omega_{12}^2\,\vec{P} - 2\omega_{12}\,\vec{d}_{12}\,\vec{d}_{21}\cdot\vec{E}\,n_0\,\Delta$$

$$\vec{P}(\vec{r},\omega) = \varepsilon_0\,\underline{\underline{\overleftrightarrow{\chi}(\omega)}}\,\vec{E}(\vec{r},\omega)$$

ohne Vektoren (denn χ ist sonst Tensor)

$$\chi(\omega) = \frac{2\omega_{12}|d_{12}|^2 u_0}{\varepsilon_0} \, \frac{\Delta}{-\omega^2 + \omega_{12}^2}$$

linearer mechanischer Oszillator

Neu ist das Auftauchen der Inversion in den Gleichungen.

Die Absorption $\hat{=}$ $\mathrm{Im}(\chi)$

Das Vorzeichen der Absorption hängt von Δ ab

$\Delta \lessgtr 0$
- $\nearrow$ $\rho_{11} < \rho_{22}$ $\rightarrow$ negative Absorption
- $\searrow$ $\rho_{11} > \rho_{22}$ $\rightarrow$ übliche Absorption

neu negative Absorption = Verstärkung, wenn

$\rho_{22} = 1$

stimulierte Emission

$\rho_{11} = 0$

wenn

$\rho_{22} = 0{,}5$

$\rho_{11} = 0{,}5$

$\rightarrow \Delta = 0 \rightarrow$ keine Wechselwirkung.