

3. Diagramme: Verwendung, Interpretation, Observable

Idee: geht es auf einer Stufe der Theorie Bilder zu malen (physikalische Prozesse) und diese dann mit Leben (Formeln) zu füllen? \rightarrow 2-3 VL bis dahin

3.1. Diagramme und LCT

angestrebt ist Plausibilitätsbeweis für beliebige Wechselwirkung (El-Phonon, El-El WW), zur Erinnerung, LCT bedeutet, daß:

zeitgeordnete exp-Funktionen bzw. Reihen so entwickelt werden:

$$\left\langle T \exp \left(\int_0^t dt' V(t') \right) \right\rangle = \sum_n W_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^t dt_n \langle T V(t_1) \cdots V(t_n) \rangle$$

$$= \exp \left(\sum_e \tilde{u}_e \right) = \exp \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \int dt_1 \cdots \int dt_l \langle T V(t_1) \cdots V(t_l) \rangle \right)$$

über alle verbundenen Diagramme

$$= \exp \left(\sum_e u_e \right) = \exp \left(\sum_{e=1} \frac{1}{e} \int dt_1 \dots \int dt_e \langle T V(t_1) \dots V(t_e) \rangle_{\text{ND}} \right)$$

über alle verbunden - verschiedene Diagramme

Beweisungen:

a) $V(t)$ ist eine Wechselwirkung in H im W -Bild der QM

z.B. $\sum_{u_1, u_2} a_{u_1}^+ a_{u_2} \phi_{u_1 u_2}$ (El-Ph. Kopplg.)

b) Jeder Term W_n, u_e, \tilde{u}_e kann über Summe von

Diagrammen (z.Z!) dargestellt werden,

z.B.: $\int dt_1 \langle T V(t_1) \rangle \approx \int dt_1 (\text{Summe von Diagrammen})$

Es existiert $(2n)!$ Diagramme in der n -ten Ordnung der

Störperturbation für W_n .

Um zu gewährleisten, hat man LCT:

Schränkt Zahl der Diagramme ein!

c) in \tilde{u}_e treten nur verbundene Diagramme auf:

nicht verbundene sind:

$$W_n \sim \int dt_1 \dots \int dt_n \langle T V_1 \dots V_m V_{m+1} \dots V_n \rangle$$

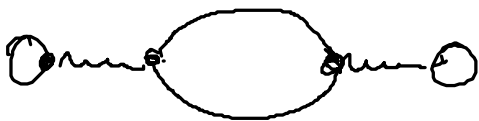
$$= \underbrace{\int dt_1 \dots \int dt_m \langle T V_1 \dots V_m \rangle}_{\text{faktorisieren bzgl. Zeitintegration}} \underbrace{\int dt_{m+1} \dots \int dt_n \langle T V_{m+1} \dots V_n \rangle}_{\text{faktorisieren bzgl. Zeitintegration}}$$

faktorisieren bzgl. Zeitintegration

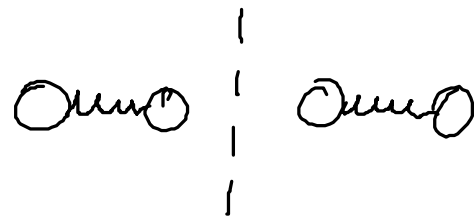
verbundene Diagramme faktorisieren nicht!

in Bildern:

verbunden:



nicht verbunden:



man kann Schnitt legen, ohne Zerstörung
weil die in Zeitintegration faktorisieren.

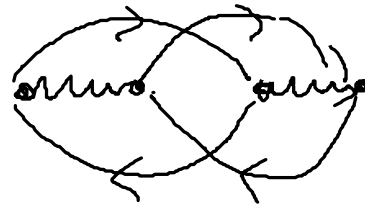
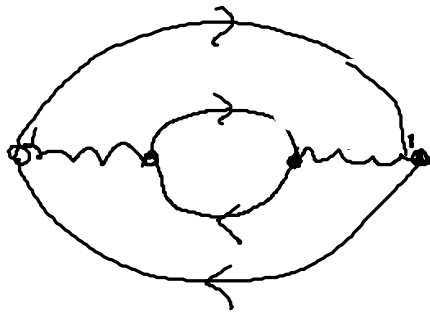
d) ^{nur wenn} Verbundene verschiedene Diagramme treten in \mathcal{U}_2 auf

verschieden (^{nicht} topologisch äquivalent) =

sind die verbundenen Diagramme, die

durch eine Tausch von Zeitvariablen t_i, t_j

mitte an einander vorbeigehen



t_1 t_2 t_3 t_4

denn $t_3 \leftrightarrow t_4$ im 2. Diagramm

kann das auch erzeugt werden

(Umklappe $t_4 \rightarrow t_3$)

Dann sind diese Diagramme gleich,

$$\text{weil } \int dt_3 \int dt_4 = \int dt_4 \int dt_3$$

→ man kriegt Faktor 2

Es gibt in jeder Ordnung U_e die verbundenen

Diagramme $(e-1)!$ äquivalente Diagramme

zu einer der verschiedenen Diagramme

$$\sum_e \frac{1}{e!} \Rightarrow \sum \frac{(e-1)!}{e!} = \frac{1}{e} \Rightarrow U_e$$

e) Es gibt weitere Symmetrie die man

Zusätzlich in verbundenen Diagramme unter kann;

z.B. Vertausch u. Summe index 1, 4

Coulomb-WW $V_{1234} = V_{2143} \cdot$

(Später)

→ kein Fadweg

die Beweise etwas strenger fassen, plausibel machen:

a) Wechselwirkungen

wohl El-Ph und El-El-WW einheitlich beschreiben
(zumindest ähnlich)

starkel El-Ph-WW: $V(t) = \sum_{u, m, \alpha} g_{u\alpha}^{\alpha} \phi_{\alpha}(t) a_u^{\dagger}(t) a_m(t)$

Störreihe in $W_n = \langle T V(t_1) V(t_2) \dots V(t_n) \rangle =$

$$= \sum_{(u, m_i)} \langle T \sum_{(\alpha_i)} g_{u_1 m_1}^{\alpha_1} g_{u_2 m_2}^{\alpha_2} \dots g_{u_n m_n}^{\alpha_n} \phi_{\alpha_1}(t_1) \phi_{\alpha_2}(t_2) \dots \phi_{\alpha_n}(t_n) \rangle$$

$$\cdot \langle T a_{u_1}^\dagger(t_1) a_{u_1}(t_1) a_{u_2}^\dagger(t_2) a_{u_2}(t_2) \dots a_{u_n}^\dagger(t_n) a_{u_n}(t_n) \rangle$$

↑
(wie 3)

anschaue der 1. Klammer:

$$\langle T g_1 g_2 \dots g_n \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n \rangle =$$

$$\sum_{\text{alle Kombinationen}} D_{u_1 u_1}^{u_1 u_1}(t_1 - t_1) D_{u_2 u_2}^{u_2 u_2}(t_2 - t_2) \dots D \dots$$

t_i, t_j

und Wick

Produkt v. Photon propagatoren

wie viele Kombinationen, also Summande

gibt es? bedeutet beim independent Born-Modell

$$(2n-1)(2n-3) \dots 1 = \frac{(2n)!}{n! 2^n} \quad (\text{siehe VL 2/3})$$

wir kombinieren nun passende D's mit $a^\dagger, a, a^\dagger, a$ zu

einer effektiven El-El-WW:

$$a_{u_1}^+ \uparrow \quad \uparrow a_{u_2}^+ \quad \hat{=} \quad D_{u_1 u_2}^{u_2 u_2} (t_1 - t_2) a_{u_1}^+(t_1) a_{u_1}(t_1) a_{u_2}^+(t_2) a_{u_2}(t_2)$$

$$a_{u_1} \downarrow \quad \downarrow a_{u_2} \quad \text{---} \quad t_1 \quad t_2 \quad t$$

Die Phonon tauchen nur noch als WW-Potential auf!

leicht $W_u = \frac{1}{(2u)!} \int dt_1 \int dt_2 \dots \int dt_{2u} \langle T V_1 \dots V_u \rangle$

↗
nur geradzählige
WW Zähler tauchen
auf

$$= \frac{1}{u!} \int dt_1 \int dt_2 \dots \int dt_u \langle T \underline{V^{pk}(t_1)} V^{pk}(t_2) \dots V^{pk}(t_u) \rangle$$

$$V^{pk}(t) = \int_0^{t_1} dt_1' \frac{1}{2} \sum_{\substack{u_1 u_1 \\ u_2 u_2}} D_{u_1 u_1}^{u_2 u_2} (t - t_1') a_{u_1}^+(t) a_{u_2}^+(t_1') a_{u_2}(t_1') a_{u_1}(t)$$

Das ist eine effektive El-El-WW,

die allerdings zeitretardiert ist:

das Phonon braucht Zeit, um

von erste El das zweite El im Einfluß ausüben

das sieht man in Vgl. zur normalen Coulomb-WW:

$$V^{el-el} = \frac{1}{2} \sum_{u \neq k} V_{uuek} a_u^\dagger(t) a_u(t) a_k(t) a_e(t)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{selbe Zeit!}}$

b) Diagramm darstellung

fange mit El-El-WW an und übertrage später

auf El-Ph-WW :

gesucht: $W_n = \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots \int dt_n \langle T V_1^{el-el} V_2^{el-el} \dots V_n^{el-el} \rangle$

und wird heißen $= \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots \int dt_n \sum_{\text{alle Kombinationen}} G G G^+ \dots \underline{V} \underline{V} \underline{V}$

wie viele Summande gibts ?

Es gibt $(2n)!$ mögl. Kombinationen :

1. Erzeugnisoperator kann mit $2n$ Vermittler kombiniert
 werden. , ist der 1. Erzeuger weg, bleiben dann $f.$
 der höchst $2n-1$ Vermittler

$$(2n) \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \dots = (2n)!$$

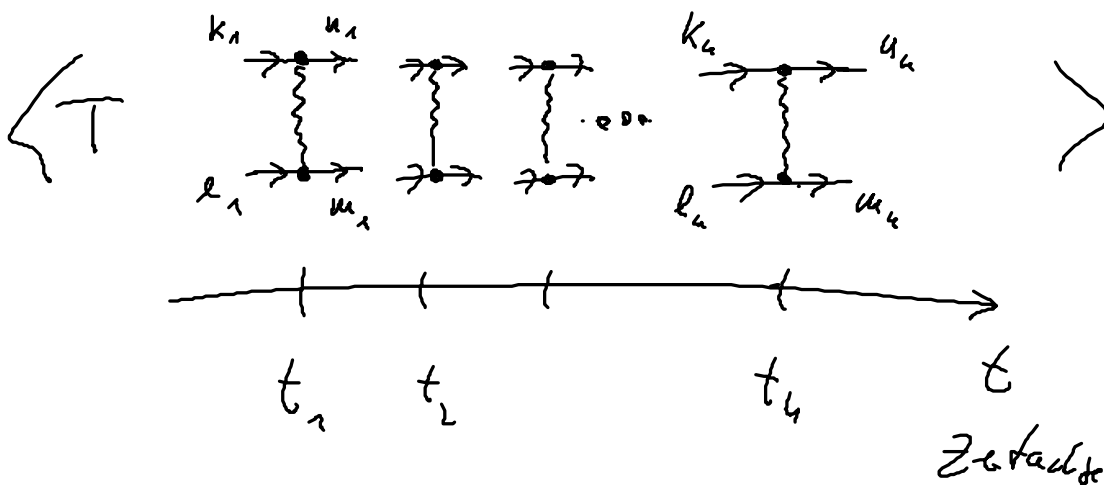
Man muß also $(2n)!$ Summand schreiben
 oder $(2n)!$ Bilder machen

Graphische Darstellung:

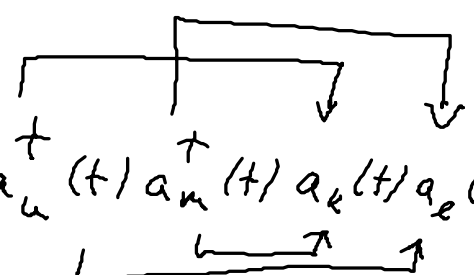
$$\langle T \ V_{u_1 u_1 l_1 k_1} \ a_{u_1}^{\dagger}(t_1) a_{u_1}^{\dagger}(t_2) a_{k_1}(t_1) a_{l_1}(t_1) \dots \rangle$$

$$V_{u_n u_n l_n k_n} a_{u_n}^{\dagger}(t_n) a_{u_n}^{\dagger}(t_n) a_{k_n}(t_n) a_{l_n}(t_n) \rangle$$

wird dargestellt durch:



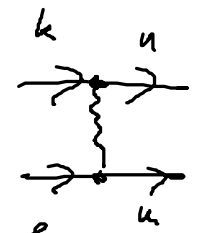
kurzer, einfacher Bsp:

$$\langle T V^{d-2l}(t) \rangle = \langle T \sum_{u, m, l, k} V_{u m l k} a_u^\dagger(t) a_m^\dagger(t) a_k(t) a_l(t) \rangle$$


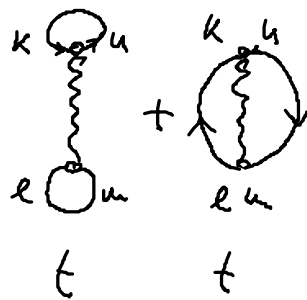
$$= \sum V_{u m l k} \left(-G_{mk}(0) G_{ue}(0) + G_{ue}(0) G_{mk}(0) \right)$$

↑
weil Wick (2.1)! = 2 = 2 Terme

führt in Bild:

$$\langle T V^{d-2l}(t) \rangle = \langle T \text{ [Diagram] } \rangle =$$


2 Summanden zu finden:

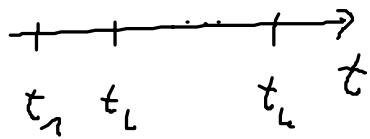


Ziel: den umgekehrten Weg zu gehen

Feynman-Regeln f. die systematische Berechnung der

l-ten Ordnung der EE-EE-WW (make → Reduz.)

1.) man denke sich ein Zeitachse



2.) G, G^+ sind Pfeile die WW - Punkte

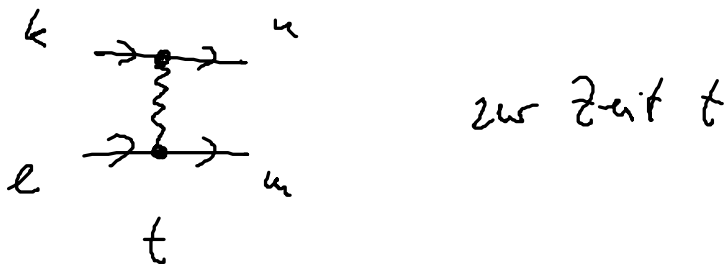
verbinden $G_{ue}(t_1, t_2) = \overset{u}{\longrightarrow} \overset{e}{\longrightarrow}$
 $t_1 \quad t_2$

$$G_{ku}^+(t_1, t_2) = \overset{k}{\longleftarrow} \overset{u}{\longleftarrow}$$

$t_1 \quad t_2$

Lage und Krümmung d. Pfeile soll kein Rollenspiel

3.) WW V werden in Sillange Linie dargestellt:



Die Punkte werden als Vertices (Vertex) bezeichnet

Sie beschreiben die Vermittler / Erzeuger durch

Ein- und Auslauf der Linien

und sind Ende bzw. Anfangspunkte der

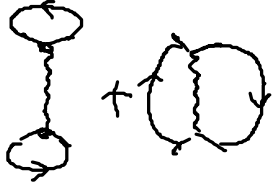
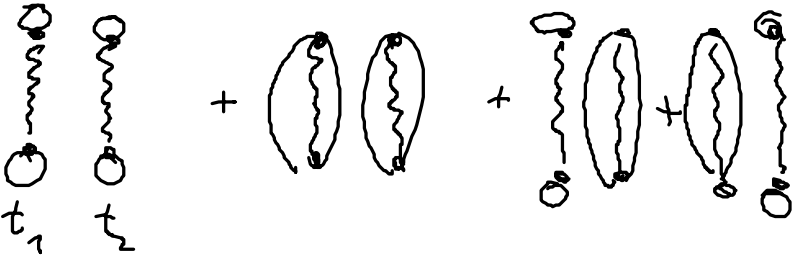
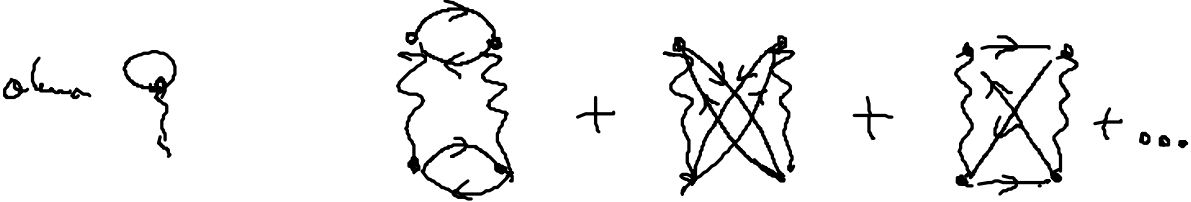
G_2 - Linien um die Kontraktion auszuführen.

um das W_n in n -ter Ordnung zu bestimmen m.p.:

a) n -WW auf Zeitachse machen

b) alle mögl. Verbindungen (G, G^+) ausführen
und alle $(2n!)$ Diagramme konstruieren

Bsp f. El-El-WW:

Ordnung (n)	Diagrammzahl $(2n)!$	Diagramme
0 (W_0)	1	1
1 (W_1)	2	
2 (W_2)	24	 <p style="text-align: center;">noch andere</p>
ohne		

t_1 t_2

3 (w_3) 720