

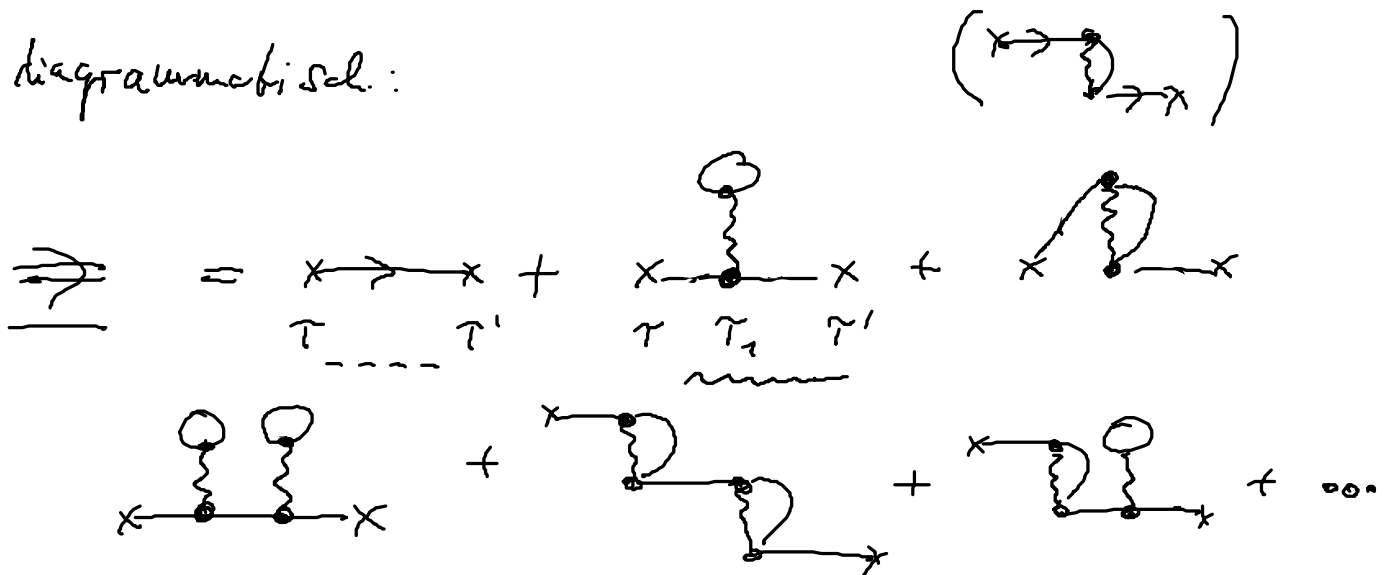
4.4. Dysongleichung

voller Propagator

$$G_{\mu\nu}(\tau, \tau') = \sum_u \int_0^\beta d\tau_1 \dots \int_0^\beta d\tau_u \underbrace{\langle T V(\tau_1) \dots V(\tau_u) a_\nu^\dagger(\tau) a_\mu(\tau') \rangle}_{\text{verbundene Diagramme}}$$

enthält die „gesamte Physik“ wird alle beobachtbaren Größen (Strom, Ladungsdichte) damit ausgedrückt werden können

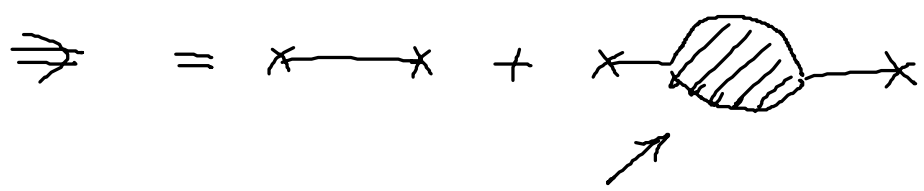
diagrammatisch:



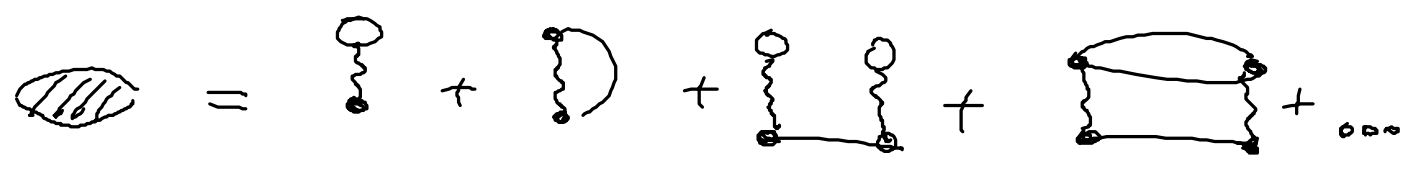
$$G_{\mu\nu}(\tau, \tau') = G_{\mu\nu}^{(0)}(\tau, \tau') + \sum_{(1)} \int_0^\beta d\tau_1 G_{\mu\nu}(\tau, \tau_1) V_{\mu_1 \nu_1}(\tau_1) G_{\nu_1 \mu_1}(\tau_1, \tau')$$

+ ...

fehlt hat man Eindruck wie Störungstheorie
 aufzubauen ist: die Graphen werden aus
 "Einschleife" zwischen zwei externen Zeitpunkten
 aufgebaut.



Summe aller Einschleife ist die Selbstenergie



Man nennt diese Summande "Selbstenergie einschleife"

$\text{ (shaded loop) } = \hat{M}(\Sigma)$ "Selbstenergie"
 ("Massenoperator")

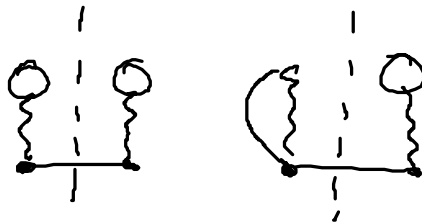
Unterschied:

- eigentliche Selbstenergie-Einschübe (irreduzibel)

Diagramme die man nicht durch einen Schnitt durch eine Fermion-Linie in „einfache“ Bausteine, die es auch in der Reihe gibt, zerlegen kann



- unigentliche Einschübe: sind durch Schnitt zerlegbar (reduzibel)



Zerschnittene sind rückführbar

$$M = \text{tadpole} + \text{self-energy loop} + \text{complex loop} + \dots$$

also Summe über alle irreduziblen Diagramme wird irreduzible Selbstenergie genannt

$$\hat{M} = \text{shaded blob} = \text{blob with M} + \text{blob with M} - \text{blob with M} + \text{blob with M} + \dots$$

dann kann man aber für $G_{\mu\nu}(\tau, \tau')$ weiterrechnen:

$$\begin{aligned}
 &= \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} \text{ (with a shaded loop) } \\
 &= \text{---} + \text{---} \text{ (with one loop) } + \text{---} \text{ (with two loops) } \\
 &\quad + \text{---} \text{ (with three loops) } + \dots \\
 &= \text{---} + \text{---} \text{ (with one loop) } \cdot \underbrace{\left(\text{---} + \text{---} \text{ (with one loop) } + \text{---} \text{ (with two loops) } + \dots \right)}_{=}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{= \text{---} + \text{---} \text{ (with one loop) }}$$

Dyson Gleichung in Diagramm Schreibweise

Rückübersetzung in Formel:

$$\begin{aligned}
 G_{\mu\nu}(\tau, \tau') &= G_{\mu\nu}(\tau, \tau') \\
 &+ \sum_{\mu_1, \mu_2} \int d\tau_1 \int d\tau_2 G_{\mu\nu_1}(\tau, \tau_1) M_{\mu_1 \mu_2}(\tau_1, \tau_2) \\
 &\quad G_{\mu_2 \mu}(\tau_2, \tau')
 \end{aligned}$$

Dyson gleichung in Formelsprache.

implizite Integralgleichung für $G_{\mu\nu}(T_1, T')$

Wenn man sich physikalisch bei M auf bestimmte

Diagramm (irreduzibel!) beschränkt, so

kann M berechnet werden, und zwar

an WW $V_{\mu\nu}(k)$ und $G_{\mu\nu}(T_1, T_2)$ (—).

In M kann auch wieder bis $\sum_{n=0}^{\infty}$ aufsummiert

werden für bestimmte Diagrammfamilien ...

(Intuition!)

Weil man kein extern zeitabhängiges Feld hat,

kann alles nur von $T - T'$, $T_n - T_n$ abhängen.

→ \overline{FT} ist sich selbst voll, um Felder erzeugen

auszunehmen.

hilfreiche Eigenschaft:

$$a) \rho_{\text{un}}(\tau, \tau') = \rho_{\text{un}}(\tau - \tau') = \langle T a_n^\dagger(\tau) a_m(\tau') \rangle$$

Beweis: $\rho_{\text{un}}(\tau, \tau') = \text{sp} \left(\begin{array}{cc} e^{-\beta H} & \tau H + -\tau H \quad \tau' H - \tau' H \\ \underline{Z} & e a_n e e a_m e \end{array} \right)$

$\tau > \tau'$ (\checkmark)

$[H, H] = 0$

$a_n^\dagger(\tau) \quad a_m(\tau)$

$$= \text{sp} \left(\begin{array}{cc} e^{-\beta H} & -\tau' H \quad \tau H + \\ \underline{Z} & e a_n e e a_m \end{array} \right)$$

$$= \langle e^{(\tau - \tau')H} a_n^\dagger e^{-(\tau - \tau')H} a_m \rangle = f(\tau - \tau')$$

b) $\rho_{\text{un}}(\tau, \tau')$ ist β periodisch

$$\rho_{\text{un}}(\tau - \tau' + \beta) = -\rho_{\text{un}}(\tau - \tau') \quad \text{ohne Beweis}$$

\rightarrow c) Man kann $\rho_{\text{un}}(\tau)$ in ein Fourierreihe
auf Intervall $[-\beta, \beta]$ entwickeln

$$\rho_{\text{un}}(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-i\pi s \tau / \beta} \tilde{\rho}_{\text{un}}(s)$$

$$\tilde{f}_{um}(s) = \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} d\tau e^{i\bar{u}s\tau/\beta} f_{um}(\tau)$$

$$f * g(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} d\tau' f(\tau - \tau') g(\tau') d\tau'$$

Faltung.

$$\widetilde{f * g}(\tau) = \tilde{f}(s) \tilde{g}(s)$$

$$d) \tilde{f}_{um}(s) = \int_0^{\beta} d\tau e^{i\bar{u}s\tau/\beta} f_{um}(\tau)$$

kanal durch Variable substitution und
 β -Periodizität zeigen

führt zurück z. Dyson Gleichung:

$$f_{um}(\tau - \tau') = G_{um}(\tau - \tau')$$

$$\sum_{u_1, u_2} \int d\tau_1 \int d\tau_2 G_{u_1 u_1}(\tau - \tau_1) M_{u_1 u_2}(\tau_1 - \tau_2) f_{u_2 u_2}(\tau_2 - \tau')$$

→

$$\tilde{p}_{um}(s) = \tilde{G}_{um}(s) + \sum_{u_1, u_2} \tilde{G}_{u_1 u_2}(s) \tilde{M}_{u_1 u_2}(s) \tilde{p}_{u_2 u_1}(s)$$

ist jetzt ein algebraische Gleichung, einfach zu lösen,
wenn M vorgegeben ist.

4.5. Räumlich homogenes El-Fas und das Quasiteilchenkonzept

Metall: 1-Bandsystem $p_{um} \quad u \rightarrow k_u, \quad u \rightarrow k_u$

f. räumlich homogenes System $k_u = k_u$

$$p_{um} = p_u \delta_{um}$$

dieser ein Index wird k genannt:

$$\tilde{p}_k(s) = \tilde{G}_k(s) + \tilde{G}_k(s) \tilde{M}_k(s) \tilde{p}_k(s)$$

$$\tilde{p}_k(s) = \frac{\tilde{G}_k(s)}{1 - \tilde{M}_k(s) \tilde{G}_k(s)} = \frac{1}{\tilde{G}_k^{-1}(s) - \tilde{M}_k(s)}$$

ist eine analytische Lösung f. $\tilde{\rho}_k$ als Funktion der Selbstenergie.

Um „die Lösung“ dieser letzten Formel zwischen

$\tilde{G}_k(s)$ berechnen:

$$\tilde{G}_k(s) = \int_0^{\beta} dt e^{\epsilon_k t} f_k e^{i\pi s t / \beta}$$

\uparrow an VL frei
 f_k - Termifkt. (ρ)

$$= \frac{-1}{\epsilon_k + i \frac{\pi s}{\beta}}$$

$$\tilde{\rho}_k(s) = \frac{-1}{\epsilon_k + i \frac{\pi s}{\beta}}$$

$\left(\epsilon_k + i \frac{\hbar \gamma}{\beta} \right) + \tilde{M}_k(s)$

ist die freie Propagator

ist die Veränderung des Elektron im Bandstruktur durch die WW des Elektron untereinander

$$\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}} \rightarrow 0 \quad k \rightarrow 0$$

da für ruhendes Elektron ($k=0$) die "neue" Energie durch $\text{Re}(M)$ gegeben ist, heißt M Selbstenergie.

Offbar entsteht durch $\text{Re}(M)$ eine

Energie renormierung die zu einem neuen Teilchen

führt kürztes Teilchen + Coulomb-WW mit anderen
 (Elektronen)

=
 Quasiteilchen

Wenn also $\text{Im}(M)$ auch $\neq 0$, dann bekommt

das Quasiteilchen ein Leben dauert

$$\text{wenn } \epsilon_k + \text{Re}(M) \gg \text{Im}(M)$$

dann ist das Quasiteilchen konzept gut.

Bemerkg. f. Metalle: um k_F (Fermi-kugel)

$$u \approx u_{\text{eff}} \left(1 + \frac{u_{\text{eff}}}{k_F} \frac{\partial}{\partial k} \text{Re} M \Big|_{k=k_F} \right)$$

↑
Quasiteilchen,

$$k \approx k_F$$

↑

1. Taylor

$$\tau_{\text{Lebensdauer}}^{-1} \approx \text{Im}(M) \rightarrow \text{sehr klein, ist bruchlos worden}$$

$$T \rightarrow 0$$

$$\tau_{\text{Lebensdauer}} \rightarrow \infty$$

$$T > 0$$

$$\tau_{\text{Lebensdauer}} \sim T^{-2}$$

⇒ Metalle können als Gas freier

Quasiteilchen mit renormierte Elektronen angesehen

beschrieben werden.

→ Grundmodell der Exp. Physik.