

## 5.3 Das ideale Bosegas

Analog wie Fermigas, nur Besetzungszahlen  $N_j = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{Energie im Zustand } \mathcal{J} \quad E_{\mathcal{J}} = \sum_{j=1}^k E_j N_j$$

Großkanonische Zustandssumme:

$$\Xi = \sum_{N_1, \dots, N_k} \exp \left\{ -\beta \sum_j (E_j - \mu) N_j \right\}$$

$$\stackrel{\text{Bosonen}}{=} \prod_j \left[ \sum_{N_j} t_j^{N_j} \right] \quad \text{mit } t_j := \exp \left\{ \beta (\mu - E_j) \right\}$$

$$= \prod_j \underbrace{\frac{1}{1 - t_j}}_{\Xi_j}$$

geometr. Reihe konvergiert genau dann, wenn  $t_j < 1$ ,  
also  $\boxed{E_j > \mu}$

Wahrscheinlichkeit, die Besetzungszahlen  $N_1, N_2, \dots$  der  $l$ -Teilchen-Zustände  $E_1, E_2, \dots$  zu finden:

$$P(N_1, N_2, \dots) = \Xi^{-1} \exp \left\{ -\beta \sum_j (E_j - \mu) N_j \right\}$$

$$= \prod_j \underbrace{(1 - t_j) t_j^{N_j}}_{= P(N_j)}$$

$$\text{Also } P(N_j) = \underbrace{(1 - \exp \{ \beta (\mu - E_j) \})}_{e^{-\beta t_j}} \exp \{ \beta (\mu - E_j) N_j \}$$

Mittlere Besetzungszahl im Zustand  $\bar{\epsilon}_j$

Frage:  $S = k_B (\ln \langle M^0 \rangle - \mathcal{Z}) \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial x_0} = \langle M^0 \rangle, \mathcal{Z} = -\beta \mu$

$$\langle N_j \rangle = \frac{\partial \mathcal{Z}_j}{\partial \bar{\epsilon}_j} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{\epsilon}_j} \ln \bar{Z}_j$$

$$\mathcal{Z}_j = -k_B \bar{\epsilon}_j$$

$$= -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{\epsilon}_j} \ln (1 - e^{-\beta \bar{\epsilon}_j}) = \frac{e^{-\beta \bar{\epsilon}_j}}{1 - e^{-\beta \bar{\epsilon}_j}} = \frac{1}{e^{\beta \bar{\epsilon}_j} - 1}$$

$$\langle N_j \rangle = \frac{1}{\exp\left[\frac{\bar{\epsilon}_j - \mu}{2T}\right] - 1}$$

Bose-Verteilung

(folgt auch explicit aus  $\langle N_j \rangle = \sum_{N_j=0}^{\infty} N_j P(N_j)$ )

NB:  $t_j \frac{d}{dt_j} t_j^{N_j} = t_j N_j t_j^{N_j-1} = N_j t_j^{N_j}$

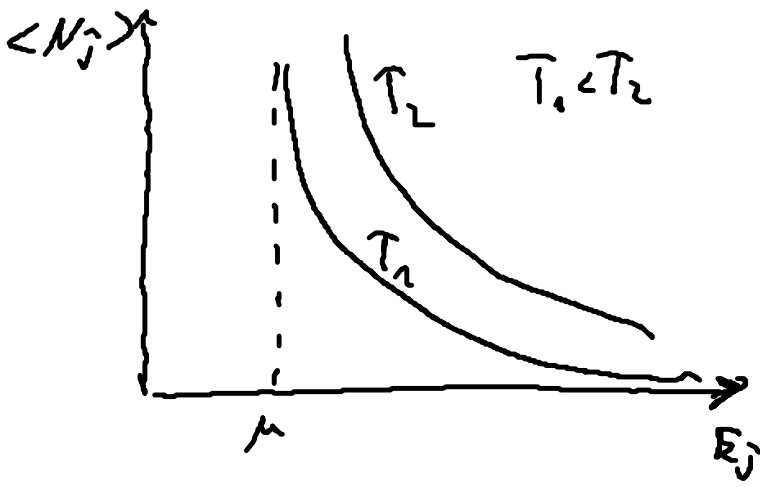
$$= \sum_{N_j=0}^{\infty} N_j (1 - t_j) t_j^{N_j}$$

$$\Rightarrow = (1 - t_j) t_j \frac{d}{dt_j} \sum_{N_j=0}^{\infty} t_j^{N_j}$$

$$= (1 - t_j) t_j \frac{d}{dt_j} \left( \frac{1}{1 - t_j} \right)$$

$$= (1 - t_j) t_j \frac{1}{(1 - t_j)^2}$$

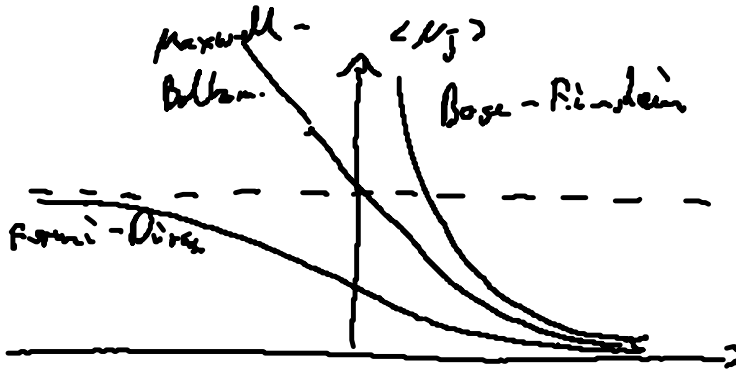
gleiche  
Reihe



divergiert für  $\bar{\epsilon}_j \rightarrow \mu$   
(Zustandssumme divergiert)

Vergleich aller 3 Verteilungen

$$\langle N_j \rangle = \frac{1}{\exp\left[\frac{E_j - \mu}{2T}\right] - \xi} \quad \text{mit } \xi = \begin{cases} -1 & \text{Fermi-Dirac} \\ 0 & \text{Maxwell-Boltz.} \\ 1 & \text{Bose-Einstein} \end{cases}$$



Für hohe Energien  
 $(E_j - \mu) / 2T \gg 1$   
 fallen alle 3 Verteilungen  
 zusammen!

Übergang zum Quasikontinuum der Zustände  $E_j = \frac{p^2}{2m}$ :

$$\ln \Xi = \sum_j \ln \Xi_j = - \sum_j \ln (1 - \xi e^{-\beta E_j}) \quad (\xi = e^{\beta \mu} \text{ Fugazität})$$

$$\approx - (2S+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \ln \left[ 1 - \xi e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \right]$$

$$\text{part. Ent.} = - (2S+1) \frac{4\pi V}{h^3} \left\{ \frac{p^3}{3} \ln \left[ 1 - \xi e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \right] \Big|_0^\infty \rightarrow 0 \right. \\ \left. - \int_0^\infty dp \frac{p^3}{3} \frac{\frac{\beta p}{m} \xi \exp\left\{-\frac{\beta p^2}{2m}\right\}}{1 - \xi \exp\left\{-\frac{\beta p^2}{2m}\right\}} \right\}$$

$$= \frac{2}{3} \beta (2S+1) \frac{V}{h^3} \int_0^\infty dp 4\pi p^2 \langle N(p) \rangle E(p)$$

$$= \frac{2}{3} \beta U$$

$$\Rightarrow \boxed{pV = 2T \ln \Xi = \frac{2}{3} U} \quad \text{wie für Fermigas}$$

Verdichtetes Bosegas (quasi-klassischer, nichtentarteter Grenz-

fall)

(NB: Entartetes Bosegas keine Dichte kann nicht wie im Fermi-Fall behandelt werden, da die Zustahsumme  $\sum_j$  für  $k_j \leq \mu$  divergiert!)

Entwicklung nach Potenzen von  $\xi = e^{\frac{\mu}{kT}} \ll 1$  d.h.  $\mu < 0$

Gesamte Teilchenzahl:

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \sum_j \langle N_j \rangle \approx (2s+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{1}{\exp\left\{\frac{p^2}{2m} - \mu\right\} kT} - 1} \\ &\quad \left(y = \frac{p^2}{2m kT}\right) \\ &= \frac{2s+1}{2} \frac{4\pi V}{h^3} (2m kT)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty dy \frac{y^{\frac{1}{2}}}{e^y - 1} \\ &= \frac{2s+1}{2} \frac{4\pi V}{h^3} (2m kT)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty y^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-y}}{1 - e^{-y}} dy \\ &\approx \underbrace{\int_0^\infty dy y^{\frac{1}{2}} e^{-y}}_{= \frac{1}{2} \sqrt{\pi}} + \underbrace{\int_0^\infty dy y^{\frac{1}{2}} e^{-2y}}_{= \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\pi}} + \dots \end{aligned}$$

$$\bar{N} \approx V \frac{2s+1}{\lambda^3} e^{\frac{\mu}{kT}} \left[ 1 + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{\mu}{kT}} \right] \quad \text{mit} \quad \lambda := \left( \frac{h^2}{2\pi m kT} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{2s+1}{N_c} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Elimination von  $\mu$  durch  $\bar{N}$ :

0. Näherung:  $\bar{N} = V \frac{2s+1}{\lambda^3} \left\{ \Rightarrow \mu^2 \dots \right\}$   
 1. Näherung:  $\bar{N} = V \frac{2s+1}{\lambda^3} \left\{ \left[ 1 + \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\bar{N} \lambda^3}{V(2s+1)} \right] \right\}$   
 $\Rightarrow f = e^{\frac{\mu}{kT}} \approx \frac{\bar{N} \lambda^3}{V(2s+1)} \left[ 1 - \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\bar{N} \lambda^3}{V(2s+1)} \right]$

Innenenergie:  $U = (2s+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \langle U(p) \rangle E(p)$   
 $= (2s+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{p^4}{2m}$   
 $= \frac{2s+1}{2} \frac{4\pi V}{h^3} (2m kT)^{3/2} kT \int_0^\infty dy y^{3/2} \frac{5e^{-y}}{1 - 5e^{-y}}$

$\approx \int_0^\infty dy y^{3/2} e^{-y} + \int_0^\infty dy y^{3/2} e^{-2y}$   
 $= \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \quad \frac{1}{2^{3/2}} \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$

$U \approx \frac{3}{2} kT V \frac{2s+1}{\lambda^3} e^{\frac{\mu}{kT}} \left[ 1 + \frac{1}{2^{3/2}} e^{\frac{\mu}{kT}} \right]$

$U \approx \frac{3}{2} kT \bar{N} \left[ 1 - \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\lambda^3}{V(2s+1)} \bar{N} \right]$

Klassische Zustandsgleichung

↑  
Quantenkorrektur

$pV = \frac{2}{3} U = kT \bar{N} \left[ 1 - \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\lambda^3}{V(2s+1)} \bar{N} \right]$

↑  
Klass. Zustandsgleichung

Bose - Anziehung : erniedrigte Druck

Bose - Einstein - Kondensation (f. Herr. Einstein : 1925  
exp. Ketterle & Wieman '95  
Nobelpreis 2001)

Grundzustand des Bose-Gas  $\epsilon_0 = 0$

$$\Rightarrow \langle N_0 \rangle = \frac{1}{g^{-1} - 1} = \frac{g}{1 - g} \quad \text{mit Fugazität } g = e^{\beta \mu}$$

Die mittlere Besetzungszahl dieses Quantenzustands kann makrosk.  
groß werden für  $g \approx 1$ ,  
d.h.  $\langle N_0 \rangle \approx \bar{N}$  (alle Teilchen im Grundzustand kondensiert)

allgemein : Grundzust. alle anderen Zustände

$$\bar{N} = \langle N_0 \rangle + N' \quad \text{mit } N' = \sum_{j>0} \langle N_j \rangle$$

(i)  $g \ll 1$  (normale Phase) :  $\langle N_0 \rangle$  vernachlässigbar  
 $\Rightarrow$  verdünntes Bosegas

(ii)  $g \approx 1$  (kondensierte Phase) :

$$N' \approx \sum_{j>0} \frac{1}{e^{\beta \epsilon_j} - 1} \ll \bar{N}$$

$$\begin{aligned} \frac{N'}{V} &\stackrel{\text{cont.}}{\approx} 2(s+1) \frac{2\pi}{h^3} (2\pi m kT)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty dg \frac{g^{\frac{1}{2}}}{e^g - 1} \\ &\approx 2(s+1) \left( \frac{2\pi m kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dg g^{\frac{1}{2}} e^{-g} \end{aligned}$$

die normale Komponente verhält sich wie ein verdünntes

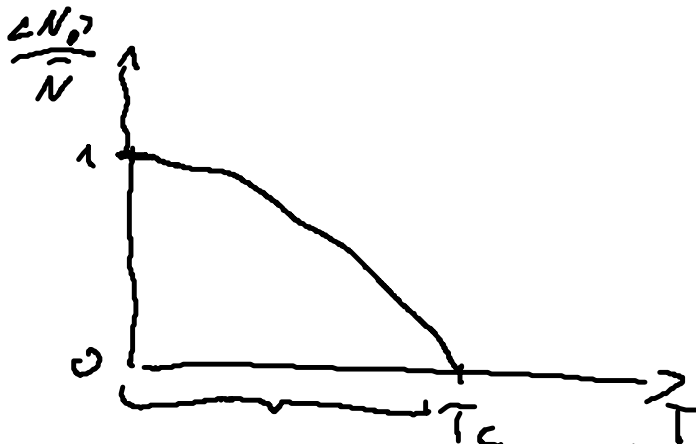
# Bose-Gas.

$$\frac{N'}{V} \approx \frac{2s+1}{\lambda^3} \sim T^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{N'}{\bar{N}} = \left( \frac{T}{T_c} \right)^{\frac{3}{2}} \quad T_c \text{ definiert durch } \int \approx \frac{\bar{N}}{V} \frac{\lambda(T_c)^3}{2s+1} = 1$$

$$\bar{N} = \langle N_0 \rangle + N' \quad \Rightarrow \quad \frac{\langle N_0 \rangle}{\bar{N}} = 1 - \frac{N'}{\bar{N}}$$

$$\Rightarrow \frac{\langle N_0 \rangle}{\bar{N}} = \begin{cases} 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{\frac{3}{2}} & \text{für } T < T_c \\ 0 & T \geq T_c \end{cases}$$



Gebiet der Bose-Einstein-Kond.

(2-Komponentiges Gas: normale + kondensierte Komponente)

Druck wird nur durch normale Komp. bestimmt.