

4.3 Diffusion

4.3.1 Transport in Zellen?

- Diffusion anwendbar auf $\left. \begin{array}{l} \text{Kolloide} \\ \text{Tinte-Moleküle} \\ \text{Ionen} \end{array} \right\} \text{in H}_2\text{O}$ \rightarrow Bsp: $D \approx 10^{-9} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 1 \frac{\mu\text{m}^2}{\text{ms}}$

• Messung von D ?

(i) Beobachtung einzelner Teilchen

(ii)



$$c(z,t) = N_t P(z,t) \quad (4.18)$$
$$\rightarrow 6Dt = \frac{1}{N_t} \int z^2 c(z,t) d^3x$$

• Bsp:

Bakterium: $R = 1 \mu\text{m}$
menschl. Zelle: $R = 10 \mu\text{m}$



$$t = \frac{R^2}{6D} = \begin{cases} 0,2 \text{ ms} \\ 20 \text{ ms} \end{cases}$$

\Rightarrow Mikrom-Bereich: Diffusion schnell (Bsp. Bakterium)
darüber: andere Transportmechanismen (Bsp. Mikrotubuli)
Bsp. Nervenzelle: bis zu 1 m

Ant. Gitter

4.3.2 Diffusionsgleichung

• 2 $P(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 P(x-b_i, t-\Delta t)$

Taylor: $P(x,t) = \frac{\partial P}{\partial t} \Delta t - \underbrace{b_i \cdot \nabla P}_{\substack{\text{wegen } \sum_i b_i = 0 \\ \sum_i b_i^2 = 0}} + \frac{1}{2} \underbrace{b_{i\alpha} b_{i\beta}}_{\substack{|b_i|=L \\ \sum_i b_{i\alpha} b_{i\beta} = L^2 \delta_{\alpha\beta}}} \frac{\partial^2 P}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$

(i) $= \tilde{c} \delta_{\alpha\beta}$
 (ii) Spur: $\alpha = \beta$
 $\frac{1}{2} \sum_i b_i^2 = L^2 = d \tilde{c} \rightarrow \tilde{c} = \frac{L^2}{d}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial t} - D \nabla^2 P = 0} \quad (4.19)$

$D = \frac{1}{2d} \frac{L^2}{\Delta t}$
 ... Diffusionsgleichung
 vgl. (4.2)

• phänomenolog. Herleitung:

(i) Erhaltung der Teilanzahl

$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div } j = 0} \quad (4.20)$

Teilanzahl-Strandichte

(ii) Materialgesetz:

$\boxed{j = -D \nabla c} \quad (4.21)$

... 1. Ficksches Gesetz

(Strom vermischt ∇c anzugeben)

\Rightarrow (ii) in (i)

$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} - D \nabla^2 c = 0} \quad (4.22)$

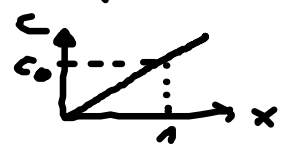
... 2. Ficksches Gesetz

D ... Materialparameter, mikroskop. Ausdruck (4.19)

• Lösungen:

(i) $c(x,t) = c_0$ + Ramodynam. GG

(ii) 1D. $c(x,t) = c_0 x$... stationäres Profil



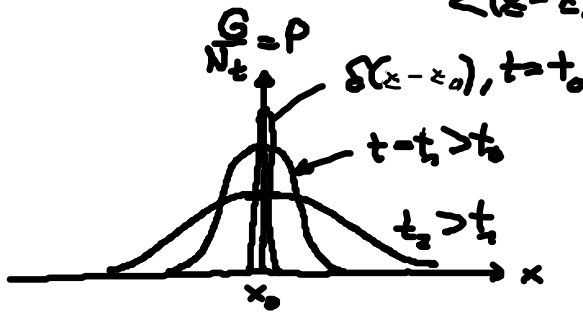
(iii) Green'sche Fkt.: $G(x-x_0, t-t_0)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D \nabla^2\right) G(x-x_0, t-t_0) = N_t \delta(x-x_0) \delta(t-t_0) \quad (4.23)$$

o.B.
[Abgabe]

$$G(x-x_0, t-t_0) = \frac{N_t}{[4\pi D(t-t_0)]^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}\right) \quad (4.24)$$

... Gaußsche Verteilung
 $\langle (x-x_0)^2 \rangle = 6D(t-t_0)$!!!



! ideale Polymerkette: $z \sim N$ End-zu-End-Vektor $z \dots$ Gaußsche Verteilung
 Anzahl der Monomere

• Bem:
 (i) Diffusion = Zufallsprozess \leftrightarrow (4.22) $\hat{=}$ deterministisches Gesetz für $c(x,t) \sim P(x,t)$

statistische Funktionen: $c(x,t) - c_{\text{real}}(x,t) \sim \frac{1}{\sqrt{N_t}} \rightarrow 0, N_t \rightarrow \infty$
 ... thermodynam. Limes

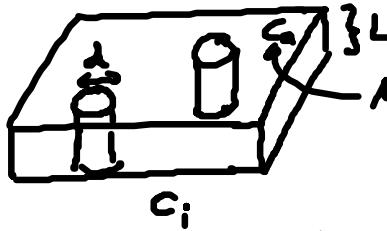
(ii) Gaußsche Verteilung, gültig für $N \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow 0, L \rightarrow 0$
 so daß: $t = N \Delta t, D = \frac{1}{2d} \frac{L^2}{\Delta t} = \frac{1}{2d} \frac{NL^2}{t}$ endlich

4.4. Diffusion in der Biologie

4.4.1 Durchlässigkeit (Permeabilität) von biol. Membranen

• Membran-Modell

(i) passive Kanäle / Poren:



Molekülkonzentration in H_2O , z.B. Zucker

$$\Delta c = c_i - c_a$$

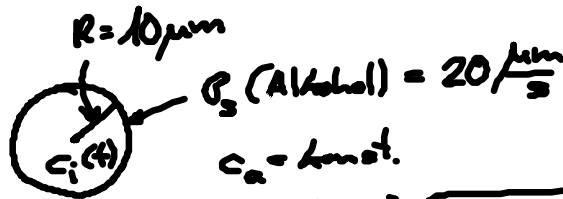
$L \gg d \rightarrow$ stationäre 1D-Diffusion durch Kanäle: $j_k = -D \frac{\Delta c}{L}$
mit $\alpha \dots$ Flächenanteil der Poren:

$$j_M = -P_s \Delta c \quad (4.25)$$

$$P_s = \alpha \frac{D}{L} \dots$$

Permeabilität der Membran für "solute"

Bsp: Zelle

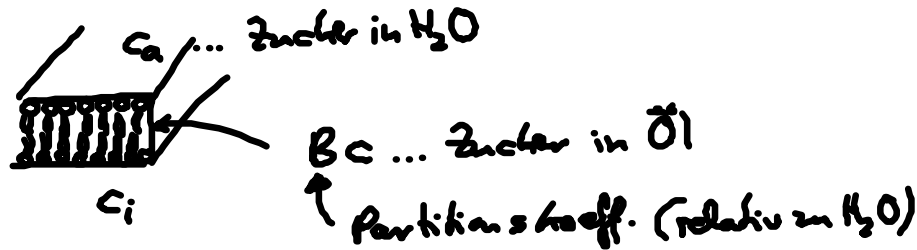


$$\frac{dV \Delta c}{dt} = j_M A \xrightarrow{(4.25)} \frac{d \Delta c}{dt} = - \left(\frac{A P_s}{V} \right) \Delta c$$

$$\Delta c = \Delta c(0) e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{V}{A P_s} \quad (4.26)$$

hier: $\tau = 0.2s !!$

(ii) keine Poren:



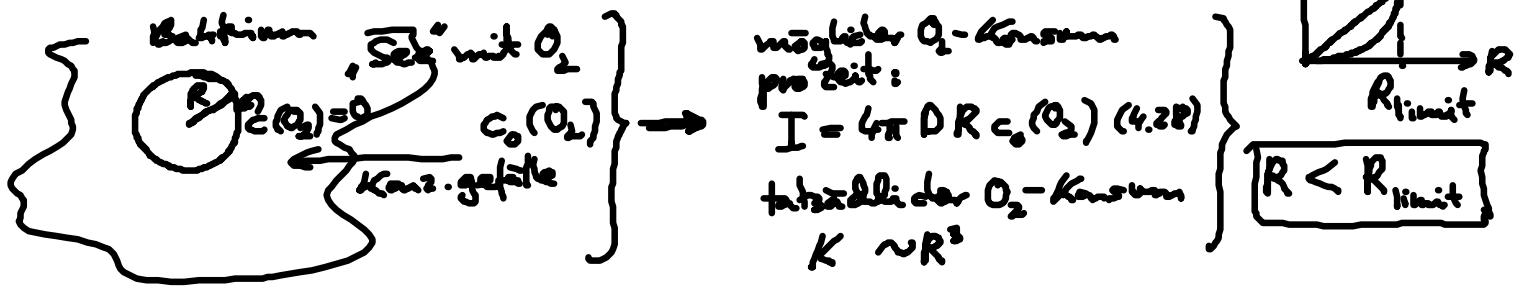
$$j_M = -P_s \Delta c$$

$$P_s = \frac{B_c D}{L}$$

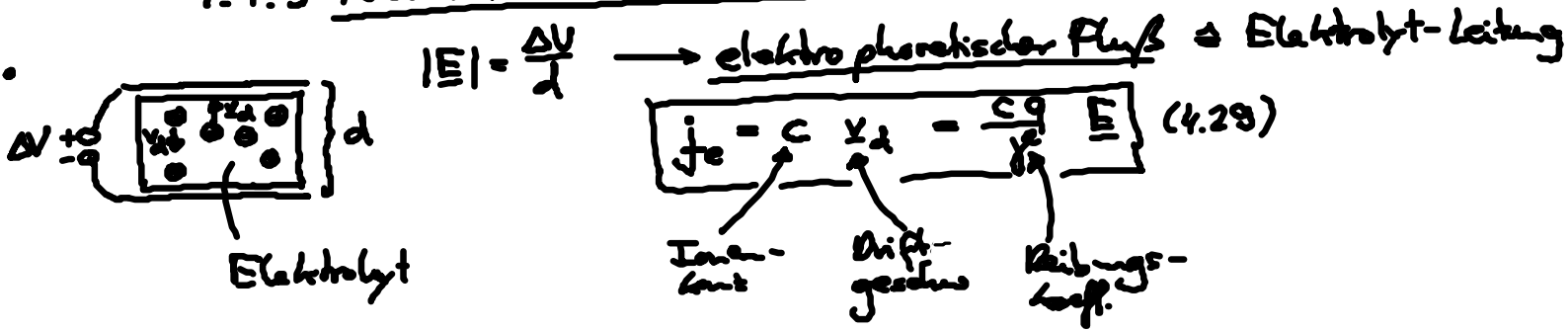
Bsp: Glukose: $P_s = 10^{-3} \frac{\mu m}{s}$
 Na^+, Cl^- : $P_s = 1-100 \frac{\mu m}{s}$

Zellen: P_s viel größer
 \rightarrow weitere Mechanismen

4.4.2 Bakterieller Metabolismus



4.4.3 Nernst-Relation ↔ Membran Potentiale



& inhomog. c & ... Einstein ($D = \frac{k_B T}{\gamma}$)

$$\rightarrow j = j_D + j_e = D(-\nabla + \frac{q}{k_B T} E) c \quad (4.30)$$

... Nernst-Planck-Formel

• Gleichgewicht. $j = 0 \dots E \leftrightarrow$ inhomog. c

$$\frac{1}{c} \nabla c = \frac{q}{k_B T} E \quad \left| \int_1^2 \dots dz \right.$$

Linienintegral, $\Delta V_{eq} = - \int E \cdot dz \dots$ Potential-differenz

$$\Delta(\ln c) = \ln c_2 - \ln c_1 = - \frac{q}{k_B T} \Delta V_{eq} \quad (4.31)$$

... Nernst-Relation

1D: $c_2 = c_{\text{oben}}, c_1 = c_{\text{unten}}$