

4.4.3 Nernst-Relation \longleftrightarrow Membran-Potentiale

• Ströme im Elektrolyt:

$$\boxed{j = j_0 + j_e = D \left(-\nabla + \frac{q}{k_B T} E \right) c} \quad (4.30)$$

... Nernst-Planck-Formel

• Gleichgewicht: $j = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta(\ln c) = \ln c_2 - \ln c_1 = - \frac{q}{k_B T} \Delta V_{eq}} \quad (4.31)$$

... Nernst-Relation

Bem: (i) (4.31) gültig für kleine $c \hat{=}$ Wv. unid. Ionenverm. löslichbar

- (ii) \odot näher bei neg. Elektro.
 \odot näher bei pos. "

(iii) (4.31) \rightarrow $\boxed{\frac{c_2}{c_1} = e^{-\frac{q \Delta V_{eq}}{k_B T}}} \quad (4.32)$

... Boltzmann-Faktor !!

Kontrolliert GG-Verteilung (kein D, da D dynam. Größe)

(iv) Bsp: Na^+

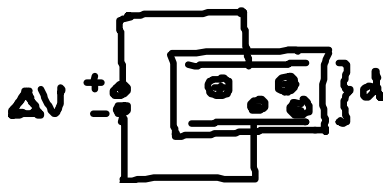
$q = e > 0, \frac{c_{\text{oben}}}{c_{\text{unten}}} = 0.1 \quad \boxed{k_B T_r = \frac{1}{40} \text{ eV}}$

$\rightarrow \boxed{\Delta V_{eq} = 62 \text{ mV}}$

$\hat{=}$ Membran-Potential
(aber: im Nicht-GG)

4.4.4 Elektr. Widerstand \longleftrightarrow Dissipation

• Elektrolyt-Zelle:



$$\boxed{j_L = q j_e = G E} \quad (4.33)$$

$$G = \frac{c q^2}{\gamma} = \frac{D q^2 c}{k_B T} \quad \dots \text{Leitfähigkeit}$$

1D: $\Delta V = E d$ } $\Delta V = R I_{ion}$ (4.34) ... Ohmsches Gesetz für jede Ionenart
 Strom: $I_{ion} = j \cdot A$ } $R = \frac{1}{\sigma} \frac{d}{A}$... elektr. Widerstand

• Merke: Erhaltungsgröße & ungeordnete Bewegung
 → diffuses Transportgesetz

(i) Teilchen diffusion: $j = -D \nabla c$
 (ii) Energieerhaltung →
 Wärmetransport: $j_Q = -\kappa \nabla T$ κ ... Wärmeleitfähigkeit
 ... → ... $\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \nabla^2 T = 0$ (4.35)

5. Hydrodynamik in der Nanowelt

• Bio-Frage: Warum bewegen sich Bakterien anders fort als Fische?
 Physikal. Idee: Reibung dominant in der Nanowelt

5.1 Die Navier-Stokes-Gleichung

• zentrale Grundgleichung für Geschw. feld $v(x,t)$
 einer viskosen, isotropen = Newtonsche Flüssigkeit

5.1.1 Grundgleichung

• Beschränkung: inkompressible Flüssigkeiten: $\text{div } v = 0$ (5.1)

Herleitung: Massenerhaltung differenziell: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0$ (5.2)
Massenstromdichte

mit $\frac{d\rho(x,t)}{dt} = \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \underbrace{v \cdot \nabla \rho(x,t)}_{\text{konvektive Zeitableitung}}$ (5.3)
totale/materielle/substantielle Zeitableitung

(5.2) → $\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } v = 0$ (5.3)

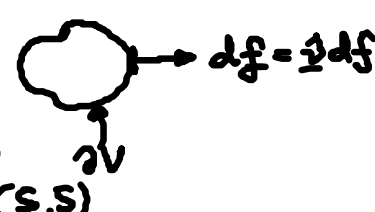
inkompressibel: $\frac{d\rho}{dt} = 0 \rightarrow$ (5.1)

• Navier-Stokes-Gl.: (= Newtonsche Gl.)

$$\underbrace{\rho \left(\frac{dv}{dt} + v \cdot \nabla v \right)}_{\text{Trägheit}} = - \underbrace{\nabla p}_{\text{Druck}} + \underbrace{\eta \nabla^2 v}_{\substack{\text{Reibung!} \\ \eta \dots \text{Scherviskosität}}} + \underbrace{\rho b}_{\substack{\text{Volumenkraftdichte} \\ \text{Bsp: } b = g \dots \text{Gravitation} \\ \text{elektromagn. Wk}}}$$

• Umschreibung: Spannungstensor \underline{I} , in Komp. T_{ij}

→ Oberflächenkraft auf Flüssigkeitsvolumen:

$$F_{0i} = \int_{\partial V} T_{ij} df_j \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_V \nabla_j T_{ij} d^3x = \int_V (\text{div } \underline{I})_i d^3x \quad (\text{S.5})$$


o.B.:
$$T_{ij} = \underbrace{-p \delta_{ij}}_{(1)} + \underbrace{2\eta A_{ij}}_{(2)} \quad (\text{S.6})$$

(1) $F_0 = - \int p df$, $p df \parallel df$! ... keine Schubspannungen ($\perp df$)
 $= - \int \nabla p d^3x$

(2) Newtonsche Flüssigkeit:
 dissipativer Anteil von $T_{ij} \sim A_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$... Scherrate (S.7)

(i) $2\eta A_{ij}$... für isotrope Flüssigkeiten

(ii) $W_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j - \nabla_j v_i) \rightarrow \omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_{jk}$
 $\rightarrow \omega = \frac{1}{2} \text{rot } v$



Vortex!
 kein Beitrag zur Dissipation!!

mit $\nabla_j T_{ij} \stackrel{(S.7)}{=} \eta \nabla_j (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \stackrel{\nabla_i v_i = \text{div } v = 0}{=} 2\eta \nabla^2 v_i$

⇒
$$\rho \frac{dv}{dt} = \text{div } \underline{I} + \rho b \quad (\text{S.9})$$

• $v \cdot \nabla v$... Nichtlinearität → Chaos, Turbulenz
 $= v_i \nabla_i v$

5.1.2 Stationäre Lösungen

• Schergeometrie:



$$\left. \begin{matrix} b=0 \\ p=p_0 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{(5.4)} \underline{v = v(z) e_x = v_0 \frac{z}{d} e_x} \quad (5.10)$$

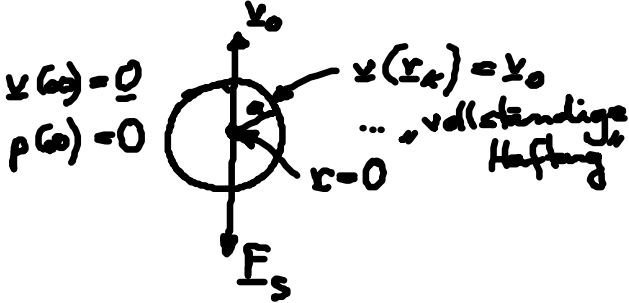
$$\tau_{xz} = \eta \frac{\partial v(z)}{\partial z} = \eta \frac{v_0}{d} \quad (5.11)$$

→ Messe η !



• Stokesche Reibung: (1) Translation → Einheiten: N_A

→ Millikan: e



(1) $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$

(2) $b = 0$

(3) Annahme: $v \cdot \nabla v \ll -\nabla p + \eta \nabla^2 v$

o.B. →

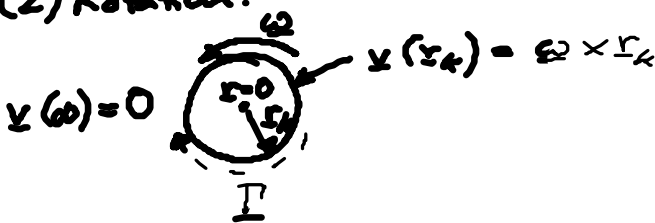
$$\begin{aligned} v_i(x) &= \left[\frac{3}{4} \frac{a}{r} \left(\delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left(1 - 3 \frac{r_i r_j}{r^2} \right) \right] v_{0j} \\ p(x) &= \frac{3}{2} \eta \frac{a}{r^3} x \cdot v_0 \end{aligned}$$

→ Stokesche Reibungskraft auf Kugel:

$$\underline{F_s = \int_{\partial V_k} \underline{\tau} d\underline{f} = -6\pi\eta a v_0} \quad (5.13)$$

→ Messe η !

(2) Rotation:



$$\underline{v = \left(\frac{a}{r} \right)^2 \omega \times r} \quad (5.14)$$

$p = \text{konstant}$

$$\underline{I = \int_{\partial V_k} r_k \times \underline{\tau} d\underline{f} = -8\pi\eta a^3 \omega} \quad (5.15)$$

... viskose Drehmoment

5.1.3 laminar ↔ turbulenter Fluß

• zähe Flüssigk. sind schwer zu mischen:

Beobachtung: (1) Fluß stoppt sofort bei $E, I = 0 \rightarrow$ Trägheit unwichtig

(2) $I \rightarrow -I$
 $E \rightarrow -E$ } Ausgangszustand

(3) Reibung, Dissipation \rightarrow Reversibilität? (2. HS \neq !)

nein: Zeitskala: Diffusion \gg Fluß

(4) laminarer Fluß (Trägheit \ll Reibung)
Flüssigkeitsschichten gleiten übereinander

Turbulenz (Trägheit \gg Reibung): wenig viskose Flüssigkeit
Kaffeemaschine

komplexe Strömungsmuster

\Rightarrow Kriterien? Dimensionsanalyse!