12.3.4. Nichtlineare Telegraphen-Gl.

- nichtlineare Leitfähigkeit:

$$\boxed{g_{Na^+}(v) = g^0_{Na^+} + B v^2} \quad , \quad v = V - V^0 \qquad (12.12)$$

$$\Longrightarrow \quad j_{gr} = \sum_i (V_i - V_i^N)\, g_i^0 + B v^2 (V - V^N_{Na^+})$$

$$\xrightarrow{E = V^N_{Na^+} - V^0} \quad \boxed{j_{gr} = g^0_{tot}\, v + B v^2 (v - E)} \qquad (12.13)$$

$$j_{gr} = 0 \Longleftrightarrow v = 0, \quad v_{1/2} = \frac{1}{2}\left(E \mp \sqrt{E^2 - 4 g^0_{tot}/B}\right) \ \ldots \text{ Fixpunkte}$$

- $$\xrightarrow[\text{mit } v_1 v_2 = \frac{g^0_{tot}}{B}]{(12.4)} \quad \boxed{\lambda^2_{axon} \frac{d^2 v}{dx^2} - \tau \frac{dv}{dt} = \underbrace{\frac{v(v - v_1)(v - v_2)}{v_1 v_2}}_{\sim j_{gr}}} \qquad (12.14) \ \ldots \text{ nichtlineare Telegraphen-Gl.}$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = 0: \quad j_{gr} \sim -\frac{dv}{dt}$$

- Impuls mit Geschw. ϑ: $\quad v(x,t) = \tilde{v}\left(t - \frac{x}{\vartheta}\right)$

$$\xrightarrow{(12.14)} \quad \left(\frac{\lambda_{axon}}{\vartheta}\right)^2 \frac{d^2 \tilde{v}}{dt^2} - \tau \frac{d\tilde{v}}{dt} = \frac{\tilde{v}(\tilde{v} - v_1)(\tilde{v} - v_2)}{v_1 v_2} \qquad (12.15)$$

- dimensionslose Größe: $\bar{v} = \frac{\tilde{v}}{v_2}$, $\quad y = -\frac{\vartheta t}{\lambda_{axon}}$, $\quad s = \frac{v_2}{v_1} > 1$, $\quad Q = \frac{\tau \vartheta}{\lambda_{axon}}$

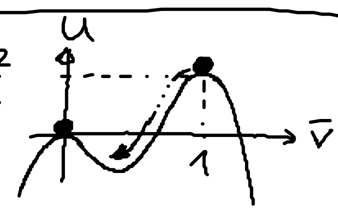
$$\longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} &= \underbrace{-Q \frac{d\bar{v}}{dy} + s \bar{v}^3 - (1+s)\bar{v}^2 + \bar{v}}_{\text{mechan. Analogon}} \\ &= -Q \frac{d\bar{v}}{dy} - \frac{dU}{d\bar{v}}, \quad U = -\frac{s}{4}\bar{v}^4 + \frac{1+s}{3}\bar{v}^3 - \frac{1}{2}\bar{v}^2 \end{aligned}}$$

mechan. Analogon:

Reibung Q

Potential U

$\frac{s-2}{12}$



• stabile Lsg: $Q \sim \vartheta$ so, daß $\tilde{v} = 0 \longrightarrow v \longrightarrow \underbrace{\tilde{v} = 1 \hat{=} v_2}_{\text{offene Kanäle}}$ für $y \in [\infty, -\infty]$ $\hat{=}\, t \in [-\infty, \infty]$

o.B. Lsg: $$\boxed{\bar{v}(y) = \left(1 + e^{+\sqrt{\frac{s}{2}}\, y}\right)^{-1} \quad \text{mit } Q = \frac{\vartheta}{\lambda_{axon}/\tau} = +\sqrt{\frac{2}{s}}\left(\frac{s}{2} - 1\right)}$$

... fortlaufender Puls mit Geschw $\vartheta \sim \frac{\lambda_{axon}}{\tau} \sim \sqrt{a}$

$\approx 6\,\frac{m}{s}$ Axon-radius $\hat{=}$ Exp.

12.4 Hodgkin-Huxley-Mechanismus & molekulare Details

• Abfall des Aktionspotentials?

12.4.1 Reale Ionen-leitfähigkeiten

• experimentelle Details:
 (i) homogene Potentiale
 (ii) konstantes Potential $\longrightarrow \dot{j}_q$
 (iii) Beobachtung von j_q: wähle c_j so, daß $V - V_j^N = 0,\ i \neq j$

• Resultate:
$$\longrightarrow g_i = g_i(V, t) \longrightarrow j_{q_i}(t) = j_{q_i}[V(t')],\quad t' \leq t$$
$$\longrightarrow \text{Telegraphen-Gl.} \longrightarrow \text{Aktionspot.}$$

• Aktionspot. entlang Membran, Zelle: liefert nur Konzentrationsgefälle für Ionen!

12.4.2 Ionenkanäle

• molek. Mechanismus für g_i? Hodgkin & Huxley: Ionenkanäle!

$$g_{tot} \approx 5\,\frac{1}{\Omega m^2} \gg g\ (\text{Permeation})$$

Fragen: (i) Realisierung
(ii) ionen spezifisch
(iii) Reaktionen auf V
(iv) Zeitverhalten

- Neher & Sakmann (1975): Messung einzelner Ionenkanäle!

  offener Na^+ - Kanal: $I = GV$, $G = 25 \cdot 10^{-12} \frac{1}{\Omega}$

  mit $V - V^N_{Na^+} = 100\,mV \longrightarrow I = 0.4\,pA \mathrel{\hat{=}} 16\,000 \frac{Na^+}{s}$

- passiver Ionenkanal: Pore aus Proteinuntereinheiten $\longrightarrow$ „Diffusion"
- ionen spezifisch!
- $G = G(V)$? $\longrightarrow$ Kanäle mit 2 Zuständen (on/off)

  (i) Realisierung

  (ii) 2 Zustände:

$$\longrightarrow \quad g_i \sim G(\text{offen}) \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wahrscheinlichkeit,} \\ \text{daß Kanal offen}}}{P_{\text{offen}}} \times \underbrace{G_{\text{Kanal}}}_{\substack{\text{Flächen-} \\ \text{dichte der} \\ \text{Kanäle}}}$$

$$P_{\text{offen}} = \frac{1}{1 + e^{\Delta F / k_B T}} , \quad \Delta F = F_{\text{offen}} - F_{\text{zu}} \qquad (12.8)$$

$$\text{Hypothese:} \quad \Delta F(V) = \Delta F(0) - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bew.} \\ \text{Ladung} \\ \text{im Kanal}}}{q} \; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{elektr.} \\ \text{Feld}}}{E} \; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Verschiebung} \\ \text{der Ladungen}}}{\ell} = \Delta F(0) - q \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Membran-} \\ \text{dicke}}}{\frac{V}{d}} \ell \qquad (12.9)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{P_{\text{offen}} = \frac{1}{1 + A\, e^{-qV\ell / d k_B T}}} \qquad (12.10)$$

$$\text{Exp.:} \quad \frac{q \ell}{k_B T_r d} = 0.15 \frac{1}{mV} \xrightarrow[\ell \leq d]{} \boxed{q \geq 3.8 e}$$

- <u>Kinetik</u>: Ionenkanäle ≈ 2-Zustands-Systeme: $\longrightarrow$ exp. Relaxationsverhalten ?!

(ii) chemisch gesteuert: Bsp. Neurotransmitter Acetylcholine

(i) Spannungsgesteuert: Bsp: K^+-Kanal: exp. Zerfall des Öffnungszustandes

(iii) aber: Na^+-Kanal: kein exp. Verhalten

2 Prozesse: 1. Schnelles Öffnen

2. „langsame Inaktivierung": Inaktivierungssegment

12.5 Nerven, Muskel, Synapsen

- Cajal (1888): Neurone = Zellen
  - ↳ (i) Empfänger: Dendrite
  - (ii) Sender: Axon
- Verbindung von Neuronen: Synapsen

  Bsp: Motor-Axon / Muskelfaser ⇒ Muskelkontraktion