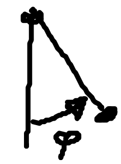
(ii) Ebenes Pendel mit Reibung



$x_1 = \varphi$

$x_2 = m l^2 \dot{\varphi}$

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{2\gamma\dot{\varphi}}_{\text{Reibung}} + \omega^2 \sin\varphi = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_2}{m l^2} \\ \dot{x}_2 &= -mg\, l \sin x_1 - 2\gamma x_2 \end{aligned}\right\} \text{ Fixpunkte ungeändert}$$

Linearisierung: $\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ -mg\, l \cos x_1 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$

a) $x_1 = x_2 = 0$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ -mg\, l & -2\gamma \end{pmatrix}$

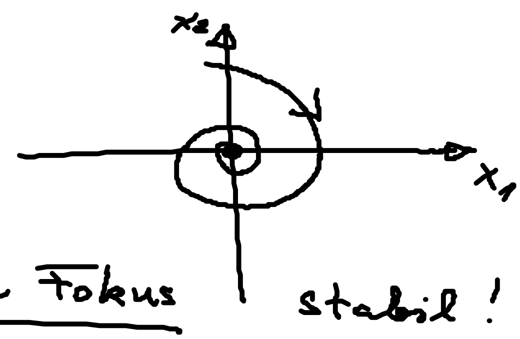
Eigenwerte: $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \underbrace{\frac{g}{l}}_{\omega^2} = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

(schwache Reibung $\gamma^2 < \omega^2$)

(a_1) gedämpfte Schwingungen

(schwache Reibung)

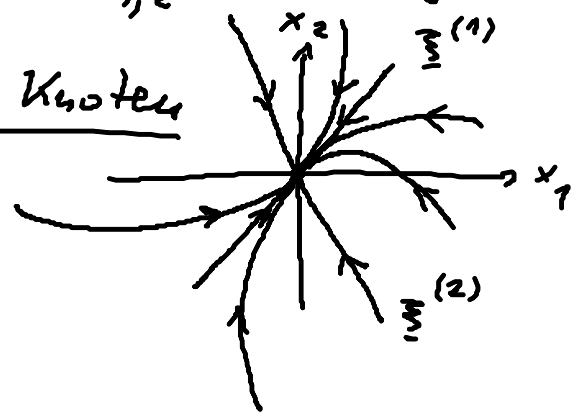


stabiler Fokus $\qquad$ stabil!

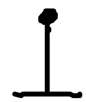
(a_2) <u>aperiodische gedämpfte Bewegung</u>
(überdämpfter Osz.)

starke Reibung ($\gamma^2 > \omega^2$) : $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$

<u>stabiler Knoten</u>



b) $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$

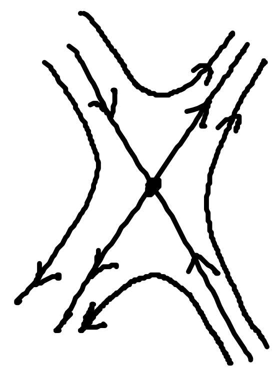


$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda - \omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \underbrace{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}}_{> \gamma}$$

$\lambda_1 > 0$
$\lambda_2 < 0$

instabil !



<u>Sattelpunkt</u>

1.2 Stabilität und Langzeitverhalten

allg. Def. der Stabilität:

sei $\underline{x}^*$ Fixpkt. des dynam. Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t)$

<u>Def.</u>: $\underline{x}^*$ heißt <u>stabil</u> (oder <u>Ljapunov-stabil</u>), wenn zu jeder Umgebung U von $\underline{x}^*$ eine Umgebung V von $\underline{x}^*$ existiert, so dass

$$\underline{x} \in V \quad \Rightarrow \quad \Phi(\underline{x}, t) \in U \quad \forall t \geq 0$$

Def.: x^* heißt <u>asymptotisch stabil</u>, wenn zu $\underline{x}^*$ eine Umgebung U ex., so dass

$$\phi(U, t_2) \subset \phi(U, t_1) \subset U$$

für $0 < t_1 < t_2$ und

$$\lim_{t\to\infty} \phi(\underline{x}, t) = \underline{x}^* \quad \forall \underline{x} \in U$$

(U schrumpft mit wachsendem t auf $\underline{x}^*$ zusammen, d. h. Phasenraumvolumina schrumpfen $\longleftrightarrow$ <u>Liouville'scher Satz</u> für <u>Hamilton'sche Systeme</u>)

Def.: Ein dynamisches System heißt <u>dissipativ</u>, wenn Phasenraumvolumina schrumpfen.

<u>Kriterium für (Lyapunov)-Stabilität</u> (lokal):

Wenn $\underline{x}^*$ stabil ist, dann hat keiner der Eigenwerte der Jacobi-Matrix $(DF)_{\underline{x}^*}$ einen pos. Realteil.

Beispiel: Fixpkt. a) ($\varphi = 0$) des Pendels mit/ohne Reibung

<u>Hinreichende Bed. für asymptot. Stabilität</u>:

Alle Eigenwerte haben negative Realteile

Beispiel: Fixpkt. a) des Pendels mit Reibung

<u>Beispiel für Instab.</u>: Fixpkt. b)

<u>Allg. System mit $n = 2$</u>

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21}}$$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\,A \pm \sqrt{(\mathrm{tr}\,A)^2 - 4\det A}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{tr}\,A = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \mathrm{div}\,\underline{F}}$$

Fallunterscheidung

(a) **Stabiler Fokus** (Strudelpkt.) : $\det A > 0$, $\mathrm{tr}\,A < 0$

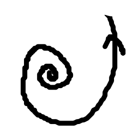
$(\mathrm{tr}\,A)^2 < 4 \det A$

$\lambda_{1,2} = -\lambda_0 \pm i\omega$ $\quad (\lambda_0, \omega > 0)$ gedämpfte Osz. im Phasenraum

(b) **Instabiler Fokus** : $\det A > 0$, $\mathrm{tr}\,A > 0$

$(\mathrm{tr}\,A)^2 < 4 \det A$

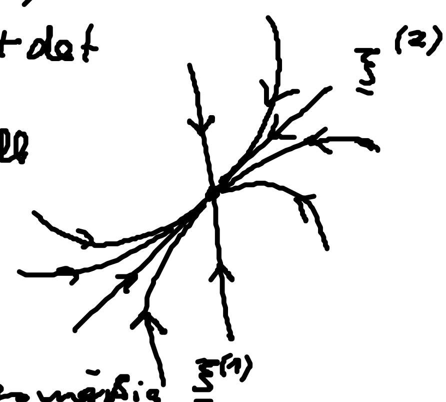
$\lambda_{1,2} = +\lambda_0 + i\omega$ $\quad (\lambda_0, \omega > 0)$ entdämpfte Osz.



(c) **Stabiler Knoten** : $\det A > 0$, $\mathrm{tr}\,A < 0$

$(\mathrm{tr}\,A)^2 > 4 \det$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 < 0\\ \lambda_2 < 0\end{array}\right\} \in \mathbb{R} \qquad \text{exp. Zerfall}$$



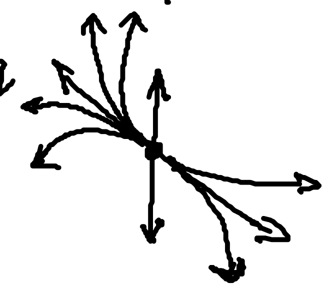
(fast alle Trajektorien nähern sich längs dem Eigenvektor, der zum betragsmäßig kleineren Eigenwert gehört)

(d) <u>Instabiler Knoten</u>: $\det A > 0$, $\operatorname{tr} A > 0$

$(\operatorname{tr} A)^2 > 4 \det A$

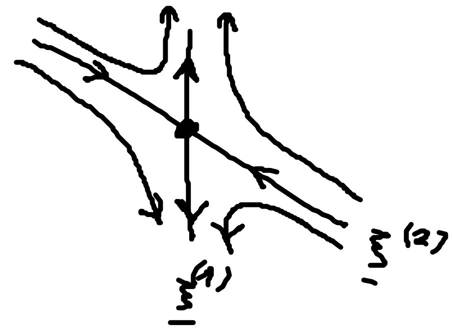
$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 > 0\\ \lambda_2 > 0\end{array}\right\} \in \mathbb{R}$$

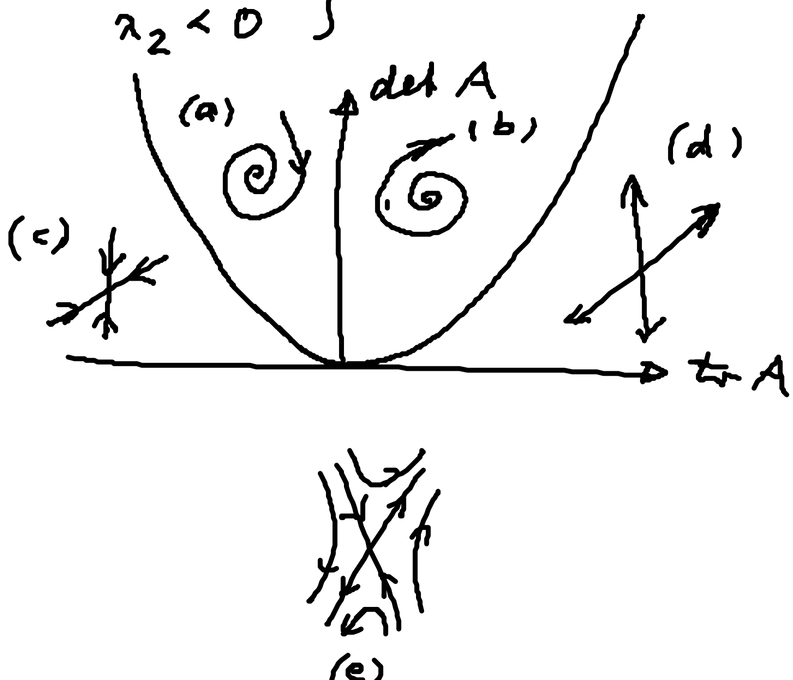
exp. Entdämpfung



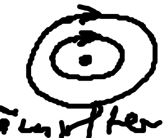
(e) <u>Sattelpunkt</u>: $\det A < 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 > 0\\ \lambda_2 < 0\end{array}\right\} \in \mathbb{R}$$





<u>Grenze zwischen den 5 Bereichen</u>: entartete Fälle

- lin. Stab.analyse versagt, höhere Terme der Taylor-entw. um Fixpkt. nötig
  <u>$\operatorname{tr} A = 0$, $\det A > 0$</u> entweder <u>Zentrum</u>
  
  oder <u>schwach stabiler/instab. Fokus</u> ungedämpfte Osz.
- qualitative Änderungen im Verhalten des Flusses möglich
  (<u>Bifurkationen</u> = Verzweigungen der Lösungsmannigfaltigkeit)

Speziell <u>Hamilton'sche Vektorfelder</u>:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

Linearisierung um Fixpkt. $\underline{x}^*$, $\delta x(t) = \underline{x} - \underline{x}^*$

$$\delta \underline{\dot{x}} = A\,\delta x \qquad \delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^{2f} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)_{x^*} \delta x_k \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tr}\, A = \mathrm{div}\, \underline{F} = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = 0$$

Aus $\boxed{0 = \mathrm{tr}\, A} = \sum_{i=1}^{2f} \lambda_i$ folgt, dass

<u>keine asymptot. Stabilität</u> möglich ist.

(sondern nur Lyapunov-Stab.)

Beweis: Sonst müssten <u>alle</u> $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$ sein

$$\Rightarrow \mathrm{tr}\, A = \sum_i \mathrm{Re}\,\lambda_i + i \underbrace{\sum \mathrm{Im}\,\lambda_i}_{\substack{0 \\ \text{(konj. kompl.)}}} < 0 \quad \lightning$$

Nicht asymptot. Stab.,
falls <u>kein</u> $\mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$

$\Rightarrow$ nur $\mathrm{Re}\,\lambda_i = 0$, $\lambda_i = \pm i\omega$ (<u>Zentrum</u>)

<u>Falls $f = 1$</u> ($n = 2$): Fixpkte können nur Zentren (falls $\det A > 0$) oder Sattelpkte (falls $\det A < 0$) sein.