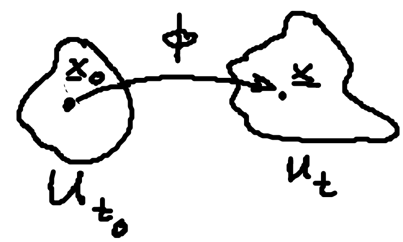
Für <u>Hamilton'sche Systeme</u> folgt aus

$$\mathrm{tr}\, A = \mathrm{div}\, \underline{F} = 0 \qquad\qquad \dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}), \quad A := (D\underline{F})_*$$

der Liouville'sche Satz
der klass. statist. Physik



$$V_t = \int_{U_t} d^{2f}x$$

$$= \int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0 \det D\phi_t(\underline{x}_0)$$

$$= \int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0 \left[1 + (t-t_0)\underbrace{\sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial F_i}{\partial x_0^i}}_{(\mathrm{div}\,\underline{F})_{x_0}} + \dots\right]$$

$$= V_{t_0} + (t-t_0)\int d^{2f}x_0 (\mathrm{div}\, F) + O(t-t_0)^2$$

$$\phi_t(\underline{x}_0) = \underline{x}(t)$$

$$D\phi_t(\underline{x}_0) = \left(\frac{\partial x^i(t)}{\partial x_0^k}\right)$$

Taylor $\approx \underbrace{\frac{\partial x_0^i}{\partial x_0^k}}_{\delta_{ik}} + (t-t_0)\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x^i}{\partial x_0^k}}_{\frac{\partial}{\partial x_0^k}F_i}$

$$\begin{pmatrix} 1+ & \dots & \dots \\ \vdots & 1+\dots & \\ \vdots & & 1+\dots \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}V_t = \lim_{t\to t_0} \frac{V_t - V_{t_0}}{t-t_0} = \int d^{2f}x_0 \underbrace{(\mathrm{div}\,\underline{F})_{\underline{x}_0}}_{0 \ \text{(Hamilton'sche Systeme)}} = 0$$

(Phasenraumvolumina erhalten,
d.h. Fluss inkompressibel!)

Für <u>dissipative Systeme</u> gilt für kleine

Volumina, die einen asymptotisch stabilen Fixpkt. $\underline{x}^*$ umschließen

$$\frac{dV_t}{dt} \approx \int_{U_t} d^{2f}x \, (\mathrm{div}\, \underline{F})_{\underline{x}^*} = \Lambda \cdot V_t \Rightarrow \boxed{V(t) = e^{\Lambda t} V_0}$$

mit <u>Phasenraumkontraktionsrate</u> $\Lambda := \mathrm{div}\, \underline{F}$
$= \mathrm{tr}\, A$
$= \sum_i \mathrm{Re}\, \lambda_i$

Allg. gilt: < 0

<u>Def.</u>: Dissipative Systeme sind solche, die Phasenraumvolumina <u>kontrahieren</u>

Asymptotisch stabile Fixpkte (Knoten, Fokus) heißen Senken oder <u>Attraktoren</u>.

<u>Beispiel für dissipatives System</u>: Lorenzmodell

Edward Lorenz, J. Atmos. Science <u>20</u>, 130 (1963)

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$$
$$\dot{y} = -\underline{xz} + rz - y$$
$$\dot{z} = \underline{xy} - bz$$

(abgeleitet aus der Temperatur- u. Strömungsverteilung einer inkompressible Flüssigkeit: Rayleigh-Benard-System)

Linearisierung:

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z & -1 & r-x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda = \mathrm{tr}\, A = -(\sigma + 1 + b)$$

$$\Rightarrow V(t) = e^{-(\sigma+1+b)t} V_0 \xrightarrow{t \to \infty} 0$$

Phasenraumvolumina schrumpfen monoton!

Hermann Haken: semiklass. Lasergleichungen
(Maxwell-Bloch-Gln.)
sind äquivalent zu den Lorenzgln.
(s. Übung, Aufgabe 1)

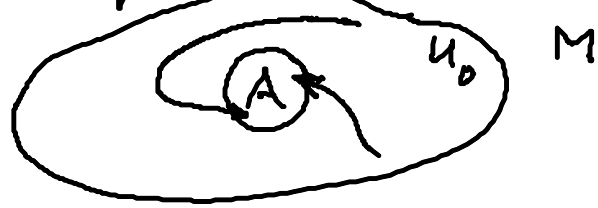
Das <u>Langzeitverhalten</u> dissipativer Systeme wird durch Attraktoren bestimmt:

<u>Def.</u>: Sei $\underline{F}$ ein Vektorfeld auf $M = \mathbb{R}^n$.
Eine abgeschlossene, unter dem Fluss ϕ_t invariante ($\phi_t(A) \subseteq A$), unzerlegbare Teilmenge $A \subset M$ heißt <u>Attraktor</u>, falls

(i) $A \subset U_0$ (offene Umgebung von A) mit $\phi_t(U_0) \subseteq U_0$ $(t>0)$

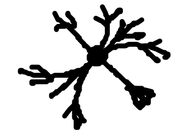
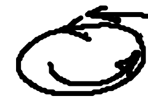
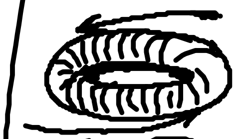
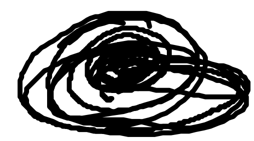
(ii) $\forall V$ mit $A \subset V \subset U_0$ $\exists T>0$, so dass $\phi_t(U_0) \subset V$ $(t>T)$

d.h. es gibt ein <u>Attraktor-Becken</u> (attractor basin) U_0, aus dem der Fluss (flow) asymptotisch in den Attraktor A läuft.



<u>NB</u>: Es kann mehrere koexistierende Attraktoren auf M geben.

<u>Beispiele für Attraktoren</u>:

Mindestdim. n des Phasenraums	Attraktor	Attraktordim	
1	stabiler Fixpkt	0	 
2	stabiler Grenzzyklus (limit cycle)	1	 periodischer Orbit
3	stabiler Torus T^2	2	 quasiperiodisch (2 Frequenzen $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$)
3	seltsamer Attr. (strange)	$2<d<3$ fraktal	chaotisch 

1.3 Bifurkationen

Abhängigkeit des Flusses von einem Kontrollpar. μ ?

Zahl und Art der Attraktoren kann sich schlagartig bei einem krit. Wert μ_c ändern

→ Bifurkation („Verzweigung" der Lösungsmannigfaltigkeit)

Notwendige Voraussetzung: Nichtlinearität

Verknüpft mit Stabilitätswechsel → untersuche lineare Stabilität der Fixpunkte (im Fall von lokalen Bifurkation)

Klassifizierung der einfachsten Bifurkationen:

(A) Eigenwert-Null-Bifurkationen

$$\lambda < 0 \longrightarrow \lambda > 0$$

stabiler Fixp. (Knoten) $\det A > 0$ $\longrightarrow$ instabiler Fixp. (Sattelpkt. für $n \geq 2$) $\det A < 0$

(A1) <u>Sattel-Knoten-Bif.</u>

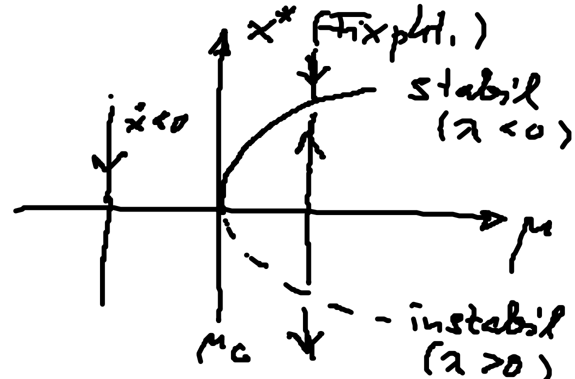
einfachster $\boxed{\dot{x} = \mu - x^2}$

$x^* = \pm\sqrt{\mu}$

(ex. nur für $\mu \geq 0$)

$\delta x \equiv x - x^*$: $\delta\dot{x} = \underbrace{-2x^*}_{} \delta x$

$\lambda \lessgtr 0$ für $x^* = \pm\sqrt{\mu}$



Bif. diagramm

$\Rightarrow \mu_c = 0$ $\boxed{\lambda = 0}$

Bifurkationspkt.