

Für Hamilton'sche Systeme folgt aus

$$\text{tr} A = \text{div } \underline{F} = 0$$

der Liouville'sche Satz
der klass. statist. Physik

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$$

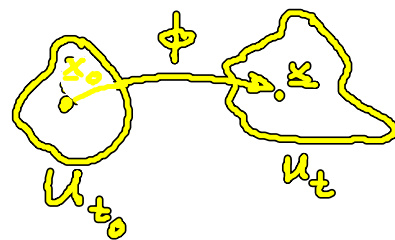
$$\lambda := (DF)_*$$

$$V_t = \int_{U_t} d^{2f}x$$

$$= \int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0 \det DF_t(x_0)$$

$$= \int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0 \left[1 + (t-t_0) \sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial F_i}{\partial x_0^i} + \dots \right]$$

$$= V_{t_0} + (t-t_0) \int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0 (\text{div } \underline{F})_{x_0} + O(t-t_0)^2$$



$$\phi_t(x_0) = \underline{x}(t)$$

$$DF_t(x_0) = \left(\frac{\partial x^i(t)}{\partial x_0^k} \right)$$

$$\approx \underbrace{\frac{\partial x_0^i}{\partial x_0^k}}_{\delta_{ik}} + (t-t_0) \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_0^k}$$

$$\begin{pmatrix} 1+ & \dots & \dots \\ \vdots & 1+ & \dots \\ \vdots & \dots & 1+ \dots \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} V_t = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{V_t - V_{t_0}}{t - t_0} = \int_{U_{t_0}} d^{2f}x_0 (\text{div } \underline{F})_{x_0} = 0$$

0 (Hamilton'sche Systeme)

(Phasenraumvolumina erhalten,
d.h. Fluss inkompressibel!)

Für dissipative Systeme gilt für kleine

Volumina, die einen asymptotisch stabilen Fixpkt. \underline{x}^* umschließen

$$\frac{dV_t}{dt} \approx \int_{U_t} d^2x (\operatorname{div} \underline{F})_{\underline{x}^*} = \Lambda \cdot V_t \Rightarrow \boxed{V(t) = e^{\Lambda t} V_0}$$

mit Phasenraumkontraktionsrate $\Lambda := \operatorname{div} \underline{F}$

$$= \operatorname{tr} A$$

$$= \sum_i \operatorname{Re} \lambda_i$$

Allg. gilt:

Def.: Dissipative Systeme sind solche, die Phasenraumvolumina kontrahieren

$$< 0$$

Asymptotisch stabile Fixpunkte (Knoten, Fokus) heißen Senken oder Attraktoren.

Beispiel für dissipatives System: Lorenzmodell

Edward Lorenz, J. Atmos. Science
20, 130 (1963)

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$$

$$\dot{y} = -xz + r z - y$$

$$\dot{z} = xy - b z$$

(abgeleitet aus der Temperatur- u. Strömungsverteilung einer inkompressiblen Flüssigkeit: Rayleigh-Bénard-System)

Linearisierung:

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z & -1 & r-x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Lambda = \operatorname{tr} A = -(\sigma + 1 + b)$$

$$\Rightarrow V(t) = e^{-(\sigma+1+b)t} V_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Phasenraumvolumina schrumpfen monoton!

Hermann Haken: semiklass. Lasergleichungen
(Maxwell-Bloch-gln.)
sind äquivalent zu den Lorenz-gln.
(s. Übung, Aufgabe 1)

Das Langzeitverhalten dissipativer Systeme
wird durch Attraktoren bestimmt:

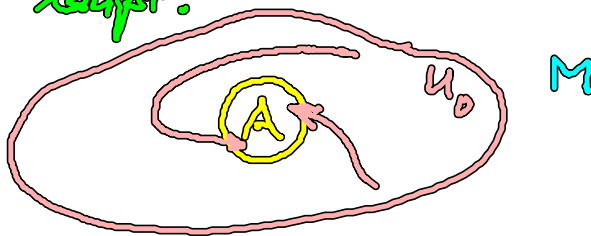
Def.: Sei \underline{F} ein Vektorfeld auf $M = \mathbb{R}^n$.

Eine abgeschlossene, unter dem Fluss ϕ_t
invariante ($\phi_t(A) \subseteq A$), unzerlegbare
Teilmenge $A \subset M$ heißt Attraktor, falls

(i) $A \subset U_0$ (offene Umgebung von A) mit $\phi_t(U_0) \subseteq U_0$ ($t > 0$)





(ii) $\forall V$ mit $A \subset V \subset U_0$ $\exists T > 0$, so dass $\phi_t(U_0) \subset V$ ($t > T$)

d.h. es gibt ein Attraktor-Becken (attractor basin)
 U_0 , aus dem der Fluss asymptotisch in den
(flow)
Attraktor A läuft.



NB: Es kann mehrere koexistierende Attraktoren
auf M geben.

Beispiele für Attraktoren:

Mindest dim. n des Phasenraums	Attraktor	Attraktor- dim	
1	stabiler Fixpunkt	0	
2	stabiler Grenz- zyklus (limit cycle)	1	 periodischer Orbit
3	stabiler Torus T^2	2	 quasiperiodisch
3	seltener Attr. (strange)	$2 < d < 3$ fraktal	 chaotisch (2 Frequenzen $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$)

1.3 Bifurkationen

Abhängigkeit des Flusses von einem Kontrollpar. μ ?
 Zahl und Art der Attraktoren kann sich
 schlagartig bei einem krit. Wert μ_c ändern
 → Bifurkation („Verzweigung“ der Lösungs-
 mannigfaltigkeit)

Notwendige Voraussetzung: Nichtlinearität

Verknüpft mit Stabilitätswechsel → untersuche

lineare Stabilität der Fixpunkte
 (im Fall von lokalen Bifurkationen)

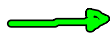
Klassifizierung der einfachsten Bifurkationen:

(A) Eigenwert-Null-Bifurkationen

$\lambda < 0 \rightarrow \lambda > 0$

stabile Fixp.
(Knoten)

$$\det A > 0$$



instabile Fixp. (Sattelpkt. für $n \geq 2$)

$$\det A < 0$$

(A1) Sattel-Knoten-Bif.

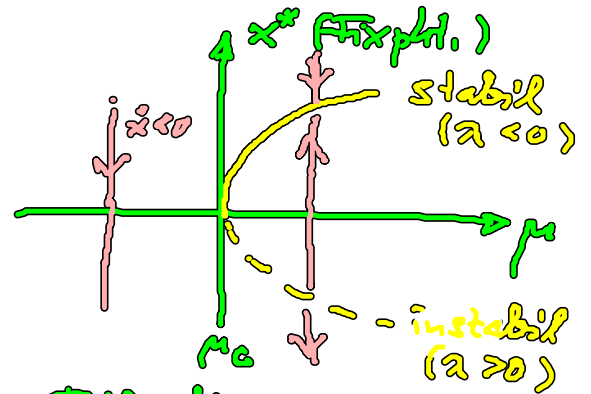
einfachster $\dot{x} = \mu - x^2$

$$x^* = \pm \sqrt{\mu}$$

(ex. nur für $\mu \geq 0$)

$$\delta x = x - x^* : \delta \dot{x} = \underbrace{-2x^*}_{\lambda} \delta x$$

$$\lambda \leq 0 \text{ für } x^* = \pm \sqrt{\mu}$$



Bif. diagramm

$$\Rightarrow \mu_c = 0 \quad \boxed{\lambda = 0}$$

Bifurkationsplt.