2 Mathematische Grundlagen & einige Anwendungen

Inhalt: 2.1 Offene und geschlossene Steuerung
2.2 Chaos Kontrolle
2.3 Optimalsteuerung / adaptive Kontrolle
2.4 Quanten Kontrolle

2.1 Offene und geschlossene Steuerung

Beispiel: Steuerung Parabolantenne, die auf einen Satelliten / ISS / o.ä. gerichtet ist

Spannung $u \longrightarrow \boxed{\text{Verstärker}} \longrightarrow \boxed{\text{Motor}} \longrightarrow$ Drehwinkel φ

Bewegungsgl.: $\dot{\varphi} = \omega$

$$J\dot{\omega} = -\tau\omega + k u$$

Variablen: Drehwinkel φ

Winkelgeschwindigkeit ω

Parameter: Trägheitsmoment J

Reibungskoeffizient r

Verstärkungsfaktor K

Ziel: Drehwinkel φ_1 zur Zeit t_1 durch Spannung u

$\Rightarrow$ Finde $u(t)$, sodass eine Lösung des Systems mit $\varphi(t_1) = \varphi_1$ bei Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = \varphi_0$ existiert.

$\Rightarrow$ evtl. viele Lösungen für $u(t)$

Kriterien: - Zeitoptimale Lösung
- Energieoptimale Lösung

...

Theoretische / Mathemische Grundlage:

Schema: $\xrightarrow[u]{\text{Eingangsdaten}} \boxed{\text{System}} \xrightarrow[y]{\text{Ausgangsdaten}}$

interne Dynamik des Systems häufig unbekannt.

Beispiel: Autofahren: Eingänge: - Gasgeben
- Bremsen
- Lenken

Ausgänge: - Tacho
- Drehzahlmesser

- Umgebung des Autos
- Navi

...

interne Dynamik (Motor, Getriebe, ...) unbekannt

Mathematisches Modell: $\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$ mit $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$

$$\underline{y} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{u})$$

$\underline{u}$: Steuerfunktion

$\underline{x}$: Systemzustand

$\underline{y}$: messbare Ausgangsgrößen

$\underline{f}$: funktionaler Zusammenhang des Systems } evtl. schwierig zu ermitteln

$\underline{g}$: " " der Messung } interdisplinäre Zusammenarbeit

Definition: Ein <u>lineares Steuerungsproblem</u> hat die Form:

Zustandsgleichung

$$\boxed{\underline{\dot{x}}(t) = \underline{\underline{A}}(t)\underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}(t)\underline{u}(t)}, \quad t \in [t_0, \infty)$$

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \quad \text{(Anfangswert)}$$

$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{C}}(t)\,\underline{x}(t) + \underline{\underline{D}}(t)\,\underline{u}(t) \quad \text{(Ausgangsgleichung)}$$

Dabei sind: $\underline{x}(t) \in \underline{X}$ (Zustandsraum)

$\underset{\sim}{y}(t) \in \overline{\underset{\sim}{Y}}$ (Ausgangsraum)

$\underset{\sim}{u}(t) \in \overline{\underset{\sim}{U}}$ (Eingangsraum)

$\overline{\underset{\sim}{X}}, \overline{\underset{\sim}{Y}}, \overline{\underset{\sim}{U}}$ sind Mengen von Funktionen, die auf $[t_0, \infty)$ definiert sind.

D.h.: $\underset{\sim}{x}(t) : [t_0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\underset{\sim}{y}(t) : [t_0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$\underset{\sim}{u}(t) : [t_0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^m$

außerdem folgt mit dieser Notation für die Matrizen

$\underset{\approx}{A}(t) : [t_0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^{n,n}$

$\underset{\approx}{B}(t) : [t_0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^{n,m}$

$\underset{\approx}{C}(t) : [t_0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^{p,n}$

$\underset{\approx}{D}(t) : [t_0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^{p,m}$

NB: analoges Vorgehen für zeitdiskrete Systeme

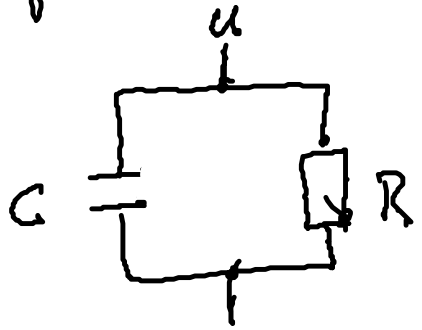
$\underset{\sim}{x}_{k+1} = \underset{\approx}{A}_k \underset{\sim}{x}_k + \underset{\approx}{B}_k \underset{\sim}{u}_k \quad \ldots$

Frage: Zusammenhang Ausgang $\underset{\sim}{y}$ und Eingang $\underset{\sim}{u}$?

$\Rightarrow$ Transferfunktion / Input-Output-Relation

$(t, \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}) \longrightarrow \underset{\sim}{y}(t)$

Beispiel: elektrischer Schaltkreis



Widerstand R

Kapazität C

Zustand: $\underline{x}(t) = q(t)$ Ladung am Kondensator

Eingang: $\underline{u}(t) = U(t)$ Spannung

Ausgang: $\underline{y}(t) = q(t)$

Zustandsgleichung: Kirchhoffsche Regel

$$\dot{q}(t) = -\frac{1}{RC}\, q(t) + \frac{1}{R}\, u(t)$$

Vergleich mit Definition liefert

$$\underline{\underline{A}} = -\frac{1}{RC}\,, \quad \underline{\underline{B}} = \frac{1}{R}\,, \quad \underline{\underline{C}} = 1\,, \quad \underline{\underline{D}} = 0$$

Lösung der Zustandsgleichung

$$q(t) = \exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right) q(t_0) + \frac{1}{R}\int_{t_0}^{t} \exp\left(-\frac{t-s}{RC}\right) u(s)\, ds$$

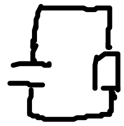
Anfangsbedingung: $q(t_0) = q_0$

hier: Lösung der Zustandsgleichung

$\hat{=}$ Ausgangsfunktion

WDH: i) asymptotisch stabil: Realteil der Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$ negativ

ii) (schwach) stabil: Realteil der Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$ nicht positiv / negativ oder Null.

Beispiele:  Eigenwert von $\underline{\underline{A}}$: $-\frac{1}{RC} < 0$

$\Longrightarrow$ asymptotisch stabil

Parabolantenne:

$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\omega}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -\frac{r}{J}\end{pmatrix}}_{=\underline{\underline{A}}} \underline{x} + \begin{pmatrix}0\\ \frac{k}{J}\end{pmatrix} u$$

Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$: $(-\lambda)\left(-\frac{r}{J}-\lambda\right) \overset{!}{=} 0$

$\Longrightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{r}{J} < 0$

$\Longrightarrow$ (schwach) stabil

Definition: Gegeben sei das System

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u} \quad \text{mit } \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$

und ein Endzustand $\underline{x}_1$. Das Paar $(t_0, \underline{x}_0)$ heißt zur Zeit $t_1 > t_0$ nach $\underline{x}_1 = \underline{x}(t_1)$ steuerbar, wenn es eine Steuerfunktion $\underline{u} \in \underline{\tilde{U}}$, so dass die Lösung $\underline{x}(t)$ des Systems mit dieser Steuerung $\underline{x}_1 = \underline{x}(t_1)$ erfüllt.

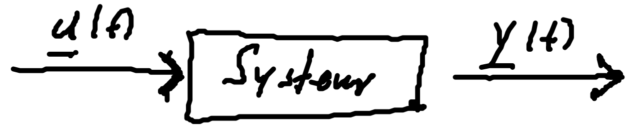
Das Paar $(t_0, \underline{x}_0)$ heißt nach $\underline{x}_1$ steuerbar, wenn es zu irgendeiner Zeit t_1 $(t_0 < t_1 < \infty)$ nach $\underline{x}_1$ steuerbar ist.

Wenn für jedes $(t_0, \underline{x}_0)$ und jedes $\underline{x}_1$ das Paar $(t_0, \underline{x}_0)$ nach $\underline{x}_1$ steuerbar, so heißt das System

vollständig steuerbar.

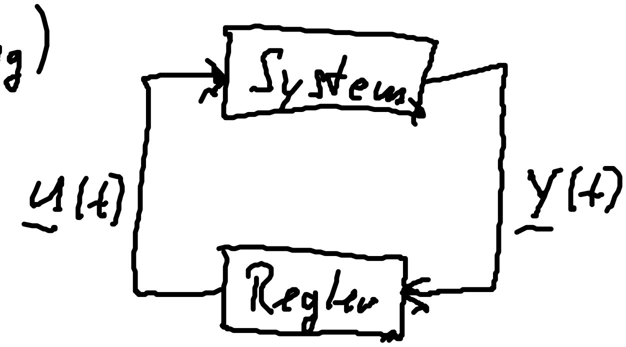
Steuerung vs. Regelung:

Offener Kreis (Steuerung):



$$\underline{u}(t) = \underline{h}(t, \underline{x}_0)$$

geschlossener Kreis (Regelung)



etwa: $\underline{u}(t) = -\underline{\underline{F}}(t)\,\underline{y}(t)$

oder: $\underline{u}(t) = \underline{h}(\underline{x}(t))$

Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

i) Das zeitinvariante System: $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}\,\underline{u}(t)$ ist vollständig steuerbar.

$\dot{\underline{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{n,m}$, $\underline{u} \in \mathbb{R}^m$

ii) Die Steuerbarkeitsmatrix

$$\underline{K} := \left(\underline{\underline{B}},\ \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}},\ \underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{B}},\ \dots,\ \underline{\underline{A}}^{n-1}\underline{\underline{B}}\right)$$

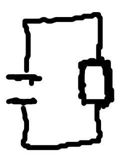
hat Rang n.

iii) Ist $\underline{p} \neq 0$ ein Eigenvektor zu $\underline{\underline{A}}^T$, so gilt $\underline{p}^T\underline{\underline{B}} \neq 0$.

iv) $\text{Rang}\left(\lambda \mathbb{1} - \underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{B}}\right) = n \quad \forall \lambda$

Beweis: ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) bis morgen (7.5.)

Beispiele:



$\underline{\underline{A}} = -\frac{1}{RC}$, $\underline{\underline{B}} = \frac{1}{R}$ $\quad n = 1$

$$\Rightarrow \underline{\underline{K}} = \left(\underline{\underline{B}}, \dots, \underline{\underline{A}}^0\underline{\underline{B}}\right) = \underline{\underline{B}} = \frac{1}{R} \neq 0$$

$\text{rang}\,\underline{\underline{K}} = 1 = n \Rightarrow$ Das System ist steuerbar.

Parabolantenne: $n=2$ $\quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{r}{J} \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{J} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{K}} = \left(\underline{\underline{B}}, \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{J} \\ \frac{k}{J} & -\frac{rk}{J^2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \text{rang}\,\underline{\underline{K}} = 2 \Rightarrow$ Das System ist steuerbar.

weitere: - stabilisierbar (Steuerung in Gleichgewichtslage)

- rekonstruierbar (Vergangenheit wiederherstellen)
- entdeckbar (Zukunft vorhersagen)
- beobachtbar ($\underset{\sim}{y} = \underset{\approx}{C}\, \underset{\sim}{x}$)

2.2 Chaoskontrolle

WDH: Kriterien für Chaos:

- sensitive Abhängigkeit gegenüber Anfangsbedingungen
- wiederkehrende Trajektorien: lokal instabile Trajektorien kommen sich auf lange Zeiten beliebig nah.

$\Rightarrow$ Ansätze für Kontrollmethoden

$\Rightarrow$ i) OGY-Kontrolle

ii) Zeitverzögerte Rückkopplung.