

3. Zeitverzögerte Rückkopplungsverfahren

3.1 Retardierte komplexe Systeme

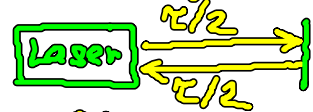
Delay-Differenzialglu : $\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t-\tau))$

Verzögerungszeit τ

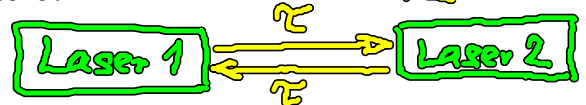
Delay (Retardierung) ist weit verbreitet in wicht'n. Systemen :

- mech. Systeme : Trägheit
- elektron. Systeme : kapazitive Effekte ($\tau = RC$)
Latenzen (Signalverarbeitung)
- optische Systeme : Signallaufzeiten (Lichtgeschwind.)

- Laser mit opt. Rückkopplung
oder opt. Injektion



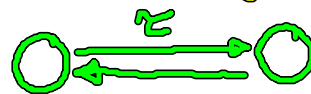
- 2 gekoppelte Laser



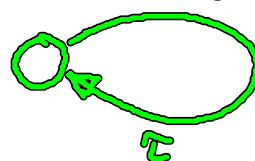
- biolog. Systeme : Zell-Zyklus-Zeit τ

biolog. Uhren

- neuronale Netzwerke : zeitverzögerte Kopplung



zeitverzögerte Rückkopplung



z.B. Biochem. Prozesse
(Neurotransmitter)

(neuro-vaskuläre Kopplung)

Retardierung generiert reichhaltiges komplexes Verhalten :

- Retardierung erhöht die Phasenraumdim. einer ODE (ordinary diff. eqs.) auf unendlich, Anfangsbed. auf ganzem Intervall $[-\tau, 0]$ notwendig:
history function $x(t)$ auf $-\tau \leq t \leq 0$
- Einfache Dgl. produzieren komplexes nichtlin. Verhalten
 - delay-induzierte Bifurkationen, Instabilitäten
 - delay-induzierte Multistabilität
 - Stabilisierung von instab. period. oder stat. Zuständen
 - Chaoskontrolle (Unterdrückung von Chaos)

Lit.: Just, Peleto, Solanz, Schöll (eds.): Delayed complex systems
(Theme Issue of Phil. Trans. Roy. Soc. A 368 (2010))

3.2 lin. Stabilitätsanalyse retardierter Dgl.

einfache lin. Delay-Dgl. $\dot{x} = -ax(t) + b x(t-\tau)$ $a, b \in \mathbb{R}$
Auf. bed. $x(t) = \phi(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$

Fixpkt. $x^* = 0$

kleine Störung: $x(t) \sim e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \lambda e^{\lambda t} = -a e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} e^{-\lambda \tau}$$

$$\boxed{\lambda = -a + b e^{-\lambda \tau}}$$

transzendente charakt. Gf. für Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$

Lösung für λ : $\underbrace{(\lambda + a)\tau}_z = b e^{-\lambda \tau}$

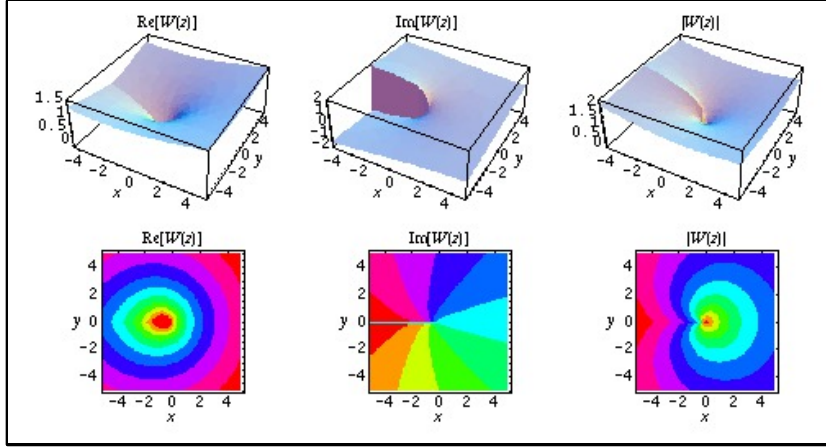
$$z e^z = b \tau e^{a\tau}$$

inverse Fkt. von $z e^z = y$: $z = W_l(y)$ Lambert-Fkt.

(vielblättrig, $l \in \mathbb{Z}$)

$$\Rightarrow \lambda_l = -a + \frac{1}{\tau} W_l(b \tau e^{a\tau})$$

($a > 0$: stab. Fixpkt. ohne Delay)
($a < 0$: inst. " " ")



Re W(z)

Im W(z)

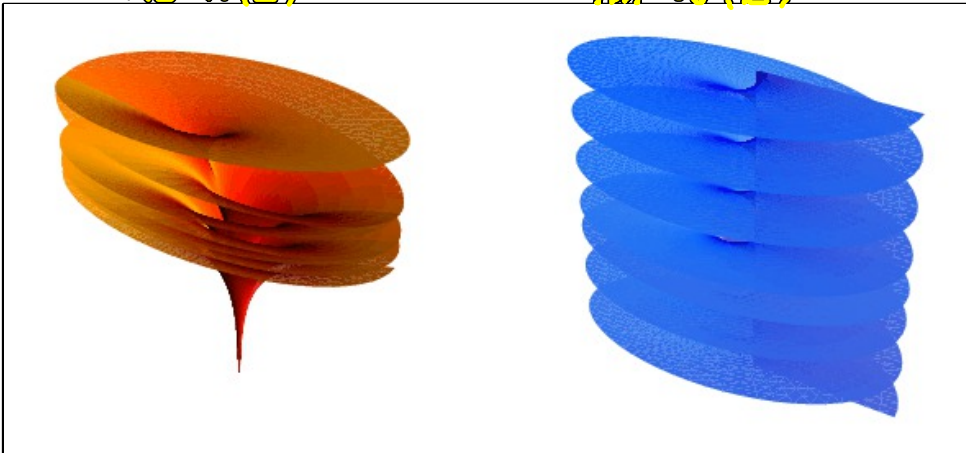
Hauptzweig :

$$W_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n$$

$$(|z| < \frac{1}{e})$$

asymptot. Entwicklung für $z \rightarrow 0$ und $z \rightarrow \infty$ ($l \neq 0$)

$$W_l(z) \approx \ln z + 2\pi i l - \ln(\ln z + 2\pi i l)$$



$z \rightarrow 0$ ($z \rightarrow 0$) :

$$W_l(z) \approx \ln z + 2\pi i l + \text{höher. Ord.}$$

$$\downarrow$$

$$-\infty$$

$\lambda_l \rightarrow -\infty \quad \forall l \neq 0$

$z \rightarrow \infty$ ($z \rightarrow \infty$) : $\lambda_l \approx -a + \frac{1}{z} [\ln(bz) + az + 2\pi i l - \ln(\ln z + 2\pi i l)]$

allg. lös. : $x(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{\lambda_l t}$

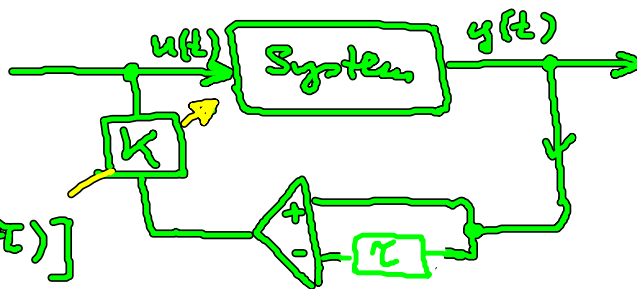
3.2.1 Stabilisierung instabiler Fixpunkte

Pyragas (1992) :

$y(t)$: Ausgangsvar.

$$u(t) = K [y(t) - y(t-\tau)]$$

Kontrollvar.



closed-loop control

(Rückkoppl. Kontrolle)

Verzögerzeit τ

Rückkoppl.stärke K

• nichtinvasiv

(Kontrollkraft verschwindet auf dem Zielzustand $y(t) = y(t-\tau)$)

Allg. Form eines 2-Var.-Systems (ohne Kontrolle)

Fixpkt. \underline{x}^* : $0 = \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}^*) \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^2$

Linearisierung um \underline{x}^* für kleine Störungen:

$$\underline{x}(t) = \underline{x}^* + \delta \underline{x}(t) : \delta \dot{\underline{x}} = (Df)_{\underline{x}^*} \delta \underline{x} \quad \text{Jacobi-Matrix}$$

$$\text{Lös. } \delta \underline{x} \sim e^{\lambda t} : 0 = \det(A - \lambda \mathbb{1})$$
$$= \lambda^2 - \lambda \text{tr} A + \det A$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\text{tr} A \pm \sqrt{(\text{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2}$$

$$(Df)_{\underline{x}^*} = A$$

Normalform eines instabilen Fokus: $\lambda = \alpha \pm i\omega$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\alpha > 0)$$

komplexe Schreibweise: $\dot{z} = (\alpha \pm i\omega)z$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$

mit zeitverzögerter Rückkopplung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} x(t) - x(t-\tau) \\ y(t) - y(t-\tau) \end{pmatrix}$$

"diagonale Rückkopplung"

$$\dot{z} = (\alpha \pm i\omega)z - K(z(t) - z(t-\tau))$$

Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$

$$\text{char. Gl.: } 0 = \det \left[\begin{pmatrix} \alpha - \lambda & \omega \\ -\omega & \alpha - \lambda \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} 1 - e^{-\lambda\tau} & 0 \\ 0 & 1 - e^{-\lambda\tau} \end{pmatrix} \right]$$

$$= [\lambda + K(1 - e^{-\lambda\tau}) - \alpha]^2 + \omega^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda + K(1 - e^{-\lambda\tau}) = \alpha \pm i\omega}$$

$$\text{Lösung durch Lambertfkt.: } \underbrace{(\lambda + K - (\alpha \pm i\omega))\tau}_{z} = K\tau e^{-\lambda\tau}$$
$$ze^z = K\tau e^{-(\alpha \pm i\omega)\tau + K\tau}$$

$$\lambda\tau = W(K\tau e^{-(\alpha \pm i\omega)\tau + K\tau}) + (\alpha \pm i\omega)\tau - K\tau$$

natürliche Zeitskala: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ (Osz.periode ohne Delay)

Hövel u. Schöll :
 Phys. Rev. E 72, 046203
 (2005)

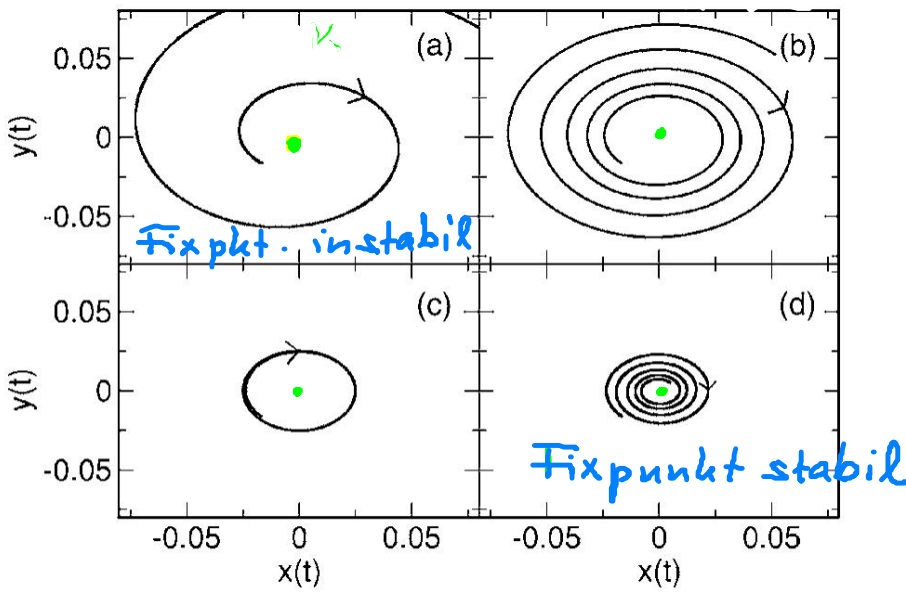


FIG. 1. Control of an unstable focus with $\lambda=0.5$ and $\omega=\pi$ in the configuration space for different values of the feedback gain K . Panels (a)–(d) correspond to $K=0, 0.2, 0.25$, and 0.3 , respectively. The time delay τ of the TDAS control scheme is chosen as 1, corresponding to $\tau=T_0/2=\pi/\omega$.

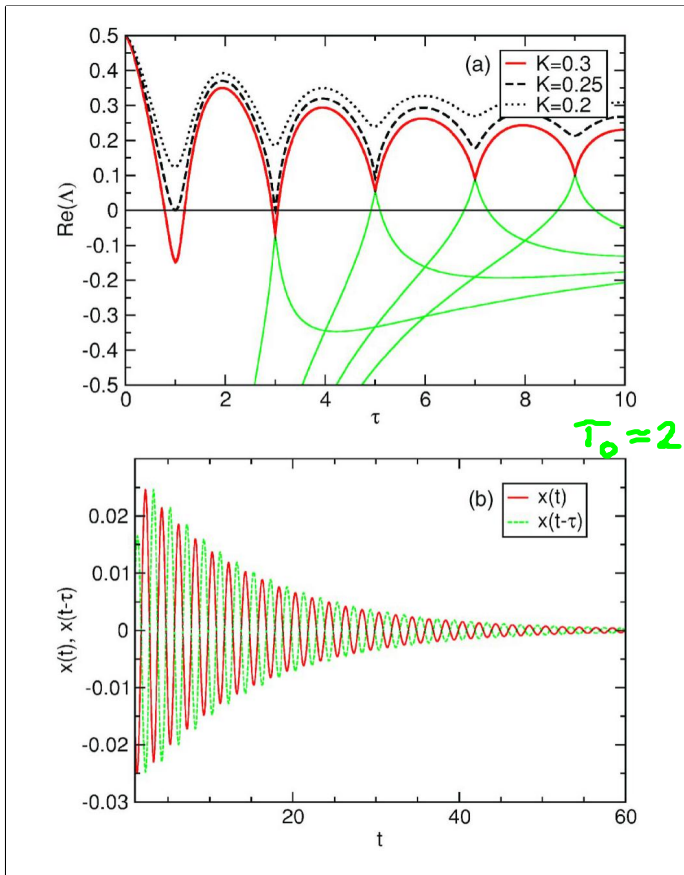


FIG. 2. (Color online) (a) Largest real part of the complex eigenvalues Λ vs τ for $\lambda=0.5$ and $\omega=\pi$ for different K . Some lower eigenvalues are also displayed for $K=0.3$ (green online). (b) Time series of the x component of the unstable focus: The solid line (red online) corresponds to $x(t)$, the dashed line (green online) to the delayed x component $x(t-\tau)$ with $\tau=1$. The parameters of the unstable focus and the control scheme are as in panel (d) of Fig. 1.

Stabilisierung für
 geeignete τ und K !
 $\tau \approx \frac{T_0}{2}, \frac{3T_0}{2}, \dots$

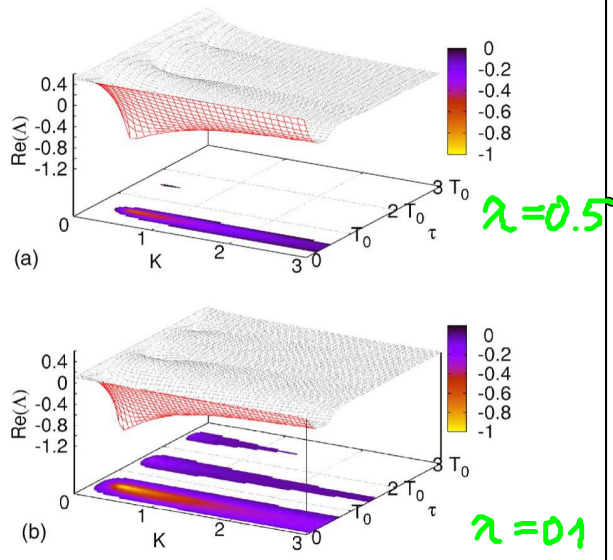


FIG. 3. (Color online) Domain of control in the K - τ plane and largest real part of the complex eigenvalues Λ as a function of K and τ according to Eq. (7). The two-dimensional projection at the bottom shows combinations of τ and K , for which $\text{Re}(\Lambda)$ is negative and thus the control successful [panel (a): $\lambda=0.5$ and $\omega=\pi$; panel (b): $\lambda=0.1$ and $\omega=\pi$].

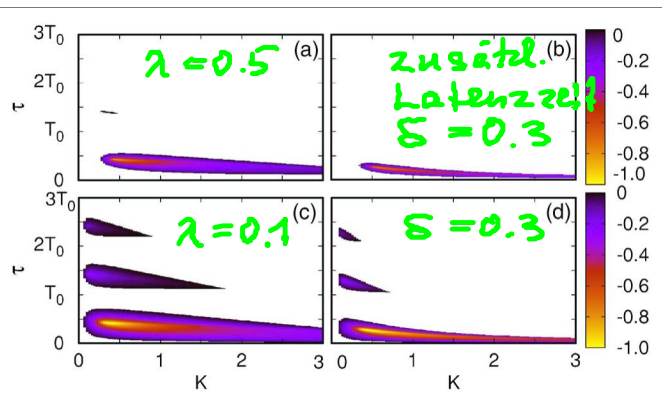


FIG. 6. (Color online) Domain of control in the K - τ plane for different latency times [panels (a) and (c): $\delta=0.1$; panels (b) and (d): $\delta=0.3$]. The shaded areas indicate combinations of τ and K , for which the largest real part of the complex eigenvalues Λ is negative and thus control is successful. The value of $\text{Re}(\Lambda)$ is indicated by the greyscale (color online). The parameters of the unstable focus are chosen as $\omega=\pi$ in all panels and $\lambda=0.5$ in (a) and (b) and $\lambda=0.1$ in (c) and (d).