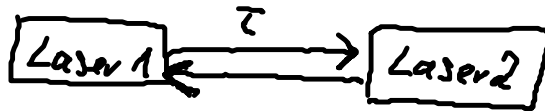


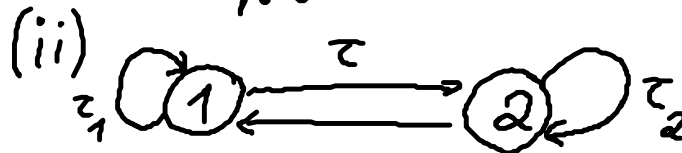
4 gekoppelte Systeme und Netzwerke

4.1 gekoppelte Systeme

Motivation (s. Kap 3.1): (i)



$\tau \neq 0$ wg. Signallaufzeiten
→ Kap. 6



Neuronen: $\tau \neq 0$ wg. neurovaskuläre
Kopplung

→ Kap. 7, Vortrag: A. Pauchuk
16:15 im EW 202

heute: Kopplung von 2 subkritischen Hopf-Normalformen

Lit.: B. Fiedler et al. Phil. Trans. R. Soc. A 368, 319 (2010)

Systemgleichung:

$$\dot{z}_1 = \underbrace{(\lambda + i + (1 + iy) |z_1|^2)}_{f(z_1)} z_1 + \underbrace{a(z_2 - z_1)}_{\text{Kopplung}}$$

$$\dot{z}_2 = (\lambda + i + (1 + iy) |z_2|^2) z_2 + \underbrace{a(z_1 - z_2)}_{\text{Kopplung}}$$

Bereits bekannt (Kap. 3.2.2): synchroner Zustand ($z_1(t) = z_2(t) = z_{\text{sync}}(t)$)

\Rightarrow Kopplung verschwindet / 2 identische Systeme.

WDH: $z_{\text{sync}} = r e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$

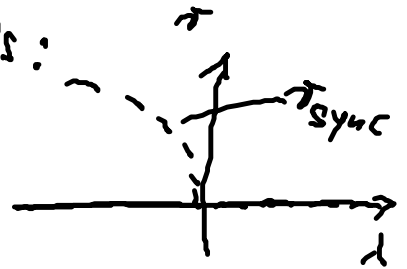
$\Rightarrow \dot{z}_{\text{sync}} = \dot{r} e^{i\varphi} + i r \dot{\varphi} e^{i\varphi} = (\lambda + i + (1 + \gamma) r^2) r e^{i\varphi}$

\Rightarrow Realteil: $\dot{r} = (\lambda + r^2) r$

Imaginärteil: $\dot{\varphi} = 1 + \gamma r^2$

Amplitude des invarianten periodischen Orbits:

$\dot{r} = 0 \Rightarrow r^2 = -\lambda \Rightarrow r_{\text{sync}} = \sqrt{-\lambda}$



Phase des invarianten periodischen Orbits

$\varphi = \omega t = \frac{2\pi}{P} t \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{2\pi}{P} = 1 + \gamma r_{\text{sync}}^2$

$= 1 - \lambda \gamma$

$\Rightarrow P_{\text{sync}} = \frac{2\pi}{1 - \lambda \gamma}$

Somit erhalten wir: $z_{\text{sync}} = \sqrt{-\lambda} \exp\left(\frac{2\pi i t}{P_{\text{sync}}}\right)$

Weitere spezielle invariante Lösungen im gekoppelten System?

Verwende neue Koordinaten: $z_+ = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$: Durchschnitt

$z_- = \frac{1}{2}(z_1 - z_2)$: Asynchronizität

$$\begin{aligned}\dot{z}_+ &= \frac{1}{2}(\dot{z}_1 + \dot{z}_2) = \frac{1}{2}\left(f(z_1) + f(z_2) + \underbrace{a(z_2 - z_1)}_{\text{aus } \dot{z}_1} + \underbrace{a(z_1 - z_2)}_{\text{aus } \dot{z}_2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(z_+ + z_-) + f(z_+ - z_-)\right) \\ &= \frac{1}{2}(z_+ + z_-) + \frac{1}{2}(z_+ - z_-) \\ &= \frac{2}{2}z_+ = z_+\end{aligned}$$

Analog: $\dot{z}_- = \frac{1}{2}(\dot{z}_1 - \dot{z}_2)$

$$= \frac{1}{2}\left[f(z_+ + z_-) - f(z_+ - z_-)\right] - 2az_-$$

Kopplung bleibt bestehen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[a(z_2 - z_1) - a(z_1 - z_2)\right] &= \frac{1}{2}\left[-a(z_1 - z_2) - a(z_1 - z_2)\right] \\ &= -2a \frac{1}{2}(z_1 - z_2) = -2az_-\end{aligned}$$

Menge der gleichphasigen Lösungen (synchrone Lösungen), d.h.

$$\begin{aligned}z_- = 0 &\Rightarrow z_1 = z_2 \Rightarrow \dot{z}_- = \frac{1}{2}\left(f(z_+ + 0) - f(z_+ - 0)\right) - 2a \cdot 0 \\ &= 0:\end{aligned}$$

$$Z_+ := \{(z_+, z_-) \mid z_- = 0\} \text{ kennen wir schon!}$$

$$z_+ = z_{\text{sync}} = r_{\text{sync}} \exp\left(\frac{2\pi i t}{T_{\text{sync}}}\right)$$

Menge gegenphasiger Lösungen:

$$Z_- := \{(z_+, z_-) \mid z_+ = 0\} \text{ d.h. } z_1 = -z_2$$

$$\Rightarrow \dot{z}_+ = \frac{1}{2} (f(0+z_-) + f(0-z_-))$$

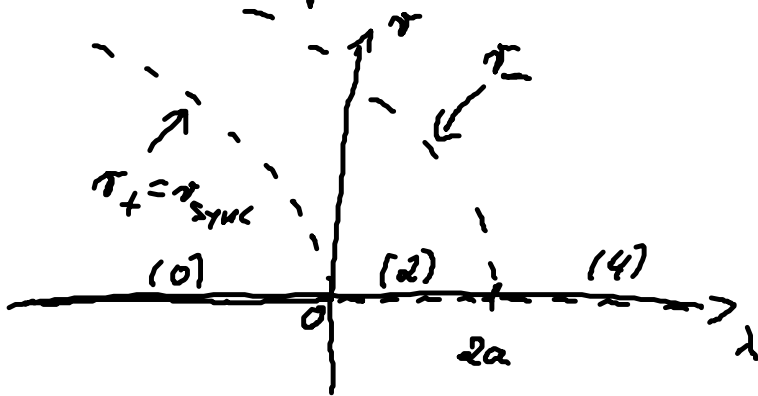
$$\bar{\lambda} \frac{1}{2} (f(z_-) - f(-z_-)) = 0$$

f ist ungerade
Funktion (kubisch)

$$z_- = \tau_- \exp\left(\frac{2\pi i t}{P_-}\right) \text{ mit } \tau_- = \sqrt{-(\lambda - 2a)}$$

$$\text{und } P_- = \frac{2\pi}{1 + \tau_-^2 \gamma} = \frac{2\pi}{1 - (\lambda - 2a)\gamma}$$

Fazit: Gegenphasiger periodischer Orbit verschwindet in einer Hopf-Bifurkation bei $\lambda = 2a$.



$(0), (2), (4)$: instabile Dimension
des Fixpunktes

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 \\ \operatorname{Im} z_1 \\ \operatorname{Re} z_2 \\ \operatorname{Im} z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Anwendung von zeitverzögerter Rückkopplungskontrolle zur Stabilisierung von τ_+ und τ_- :

(i) $\tau_+ \Rightarrow$ Kap. 3.2.2 ($\tau = P_+$) erledigt

(ii) $\tau_- \Rightarrow$ zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle mit
halber Periode: $\tau = \frac{P_-}{2}$

$$\text{Es gilt: } z_-\left(t - \frac{P_-}{2}\right) = \tau_- \exp\left(\frac{2\pi i \left(t - \frac{P_-}{2}\right)}{P_-}\right)$$

$$= \tau_- \exp\left(\frac{2\pi i t}{P_-}\right) \exp(-\pi i)$$

$$= z_-(t) \cdot (-1)$$

$$= -z_-(t)$$

und somit: $z_1(t) = \underbrace{z_+(t)}_{=0} + z_-(t) = z_-(t) = -z_-\left(t - \frac{P_-}{2}\right) \stackrel{\text{für } z_+ = 0}{=} z_2\left(t - \frac{P_-}{2}\right)$

analog: $z_2(t) = z_1\left(t - \frac{P_-}{2}\right)$

Systemgleichung mit nichtinvasiver Kontrolle:

$$\dot{z}_1 = f(z_1) + a(z_2 - z_1) + \underbrace{b(z_2(t-\tau) - z_1(t))}_{=0 \text{ für } \tau < \frac{P_-}{2}}$$

$$\dot{z}_2 = f(z_2) + a(z_1 - z_2) + b(z_1(t-\tau) - z_2(t))$$

NB: Diese Kontrolle ist invasiv für den gleichphasigen Orbit z_+ .

in z_+ und z_- Koordinaten lauten die Gleichungen:

$$\dot{z}_+ = \frac{1}{2} \left(f(z_+ + z_-) + f(z_+ - z_-) \right) + b(z_+(t-\tau) - z_+(t))$$

$$\dot{z}_- = \frac{1}{2} \left(f(z_+ + z_-) - f(z_+ - z_-) \right) - 2az_- - b(z_-(t-\tau) - z_-(t))$$

Strategie zum Nachweis der Stabilisierung von $z_- = \tau_- e^{i\varphi}$:

Untersuche Stabilität des Fixpunktes im Ursprung!

\Rightarrow Linearisierung um diesen Fixpunkt $z_1 = z_2 = 0$ ($z_+ = 0 = z_-$)

$$\dot{z}_+ = \frac{1}{2} \left[(\lambda + i)(z_+ + z_-) + (\lambda + i\omega)(z_+ - z_-) \right] + b(z_+(t-\tau) - z_+(t))$$

$$= (\lambda + i) z_+ + b(z_+(t-\tau) - z_+(t))$$

$$\dot{z}_- = (\lambda - 2a + i) z_- - b (z_+ (t - \tau) - z_-(t))$$

Zwischenaussatz: Linearisierung umt koppelt z_+ und z_-

Weiter: Ansatz $z_{\pm} \sim e^{\eta t}$ und Untersuchung der Stabilität des Fixpunktes bei $\lambda = 2a$ mit $\tau = \frac{P_-}{2}$

$$\Rightarrow \tau = \frac{P_-}{2} = \frac{2\pi}{2(1 - (\lambda - 2a)\tau)} \uparrow \pi$$

$\lambda = 2a$

Charakteristische Gleichungen:

$$z_+: 0 = 2a + i + b(e^{-\pi\eta} - 1) - \eta$$

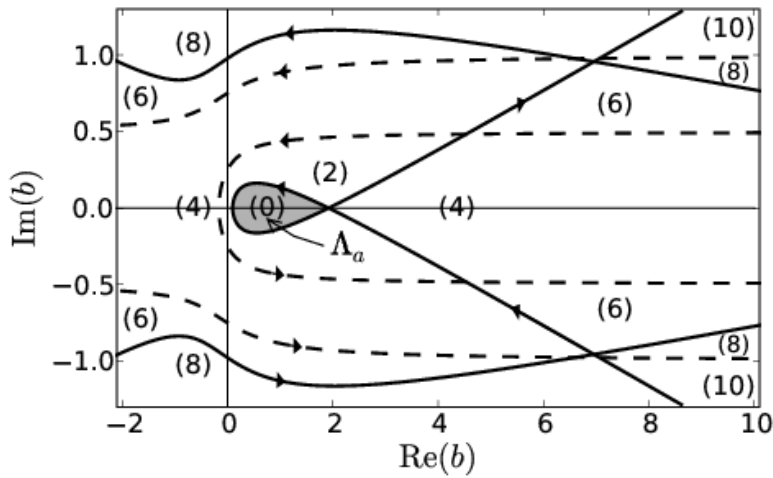
$$z_-: 0 = i - b(e^{-\pi\eta} - 1) - \eta$$

Suche Hopf-Kurven in $(\text{Re } b, \text{Im } b)$ -Ebene, die $\text{Re } \eta = 0$ erfüllen, d.h. Grenzen, an denen sich die instabile Dimension des Fixpunktes ändert: Parametrisierung der Hopf-Kurven $b = b(\omega)$.

$$b_+(\omega) = 2 \frac{a - i\omega}{1 + \exp(-2\pi i\omega)} = a + \omega \tan(\pi\omega) + i(-\omega + a \tan(\pi\omega))$$

$$b_-(\omega) = 2 \frac{i\omega}{-1 + \exp(-2\pi i\omega)} = -\omega \cot(\pi\omega) - i\omega$$

Nachrechnen mittels $\eta = i(1 + 2\omega)$, Einsetzen, Ausrechnen.



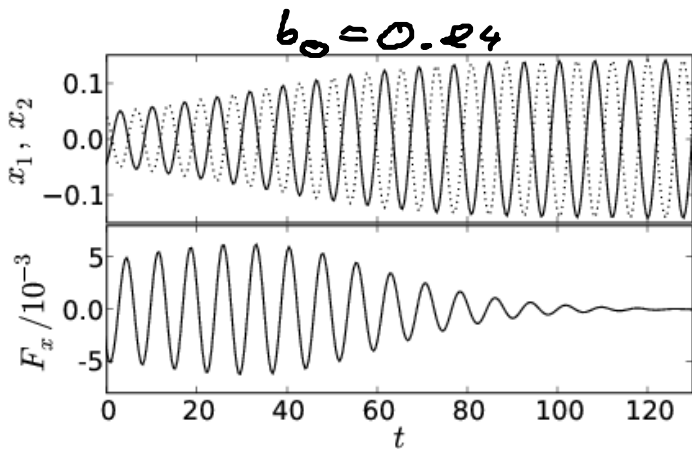
$a = 0.1$
 --- $b_-(\omega)$ -Kurven
 — $b_+(\omega)$ -Kurven
 → Richtung größerer ω
 (0), (2), (4), ... : instabile
 Dimension (des Fixpunktes)
 des periodischen?
 Orbit.

insbesondere Bereich Λ_a mit (0).

Dort ist τ_- stabilisiert (nicht invasiv für $\tau < \frac{P_-}{2}$).

$\alpha = 0.1$, $\lambda = 2\alpha - 0.01$ (τ_- instabil ohne Kontrolle), $\gamma = -10$

$$\tau = \frac{P_-}{2} = \frac{\pi}{1 - (\lambda - 2\alpha)\gamma}, \quad b = b_0 e^{i\frac{\pi}{8}}$$



großer phasig-er Orbit stabilisiert
 ← $\text{Re } z_1(t) = x_1(t) = x_2(t - \frac{P_-}{2})$
 $= \text{Re } z_2(t - \frac{P_-}{2})$

$\text{Re } z_+ \rightarrow 0$
 $z_- = \tau_- e^{i\varphi_-}$

