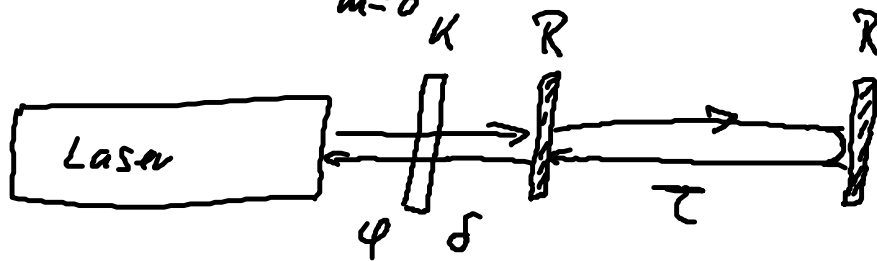


## Fortsetzung 6.1: Laser & Kontrolle

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{1}{2} (1 + i\alpha) n E - E_b - \Gamma E \\ \Gamma \frac{dn}{dt} &= \underline{I} - n - (1 + n) k(n) |E|^2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Lang-Kobayashi-} \\ \text{Gleichungen} \end{array}$$

mit: Rückkopplungssignal

$$E_b(t) = k e^{i\varphi} \sum_{m=0}^{\infty} R^m \left[ E(t - \delta - m\tau) - E(t - \delta - (m+1)\tau) \right]$$



Ref: Dahms et al., PRE 78, 056213 (2008)

Ziel: Analyse der Stabilität des lasenden Fixpunkts.

Fixpunkte im geg. System:

(i)  $n = \underline{I}$ ,  $E = 0 \Rightarrow$  triviale Fixpunkt  
(nicht lasend)

(ii)  $n = 0$ ,  $E = \sqrt{\underline{I}} e^{i\varphi}$ , setze  $\varphi = 0$  (Bezugspunkt)

$\Rightarrow$  lasender Fixpunkt

Lineare Stabilitätsanalyse:

- neue Koordinaten:  $E(t) = \sqrt{\underline{I}} \left( \Omega_0 + x(t) + iy(t) \right)$

mit  $\Omega_0 = \sqrt{\frac{\underline{I}}{\Gamma}}$

$\Rightarrow$  FP bei  $n = 0, x = 0, y = 0$

Linearisierung (ohne Kontrolle):

$$\begin{pmatrix} \dot{n} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\Gamma & -4\Omega_0 & 0 \\ \Omega_0 & 0 & 0 \\ \Omega_0 \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

mit  $\Gamma = \frac{1}{T} \left[ 1 + \mathbb{I} \left( 1 + \frac{dk}{da} \Big|_{n=0} \right) \right]$

charakteristische Gleichung:  $0 = \det \left( \underset{\text{Jacobi-Matrix}}{\underline{A}} - \lambda \underline{1} \right)$

$$= \lambda \left( \lambda^2 + 2\Gamma\lambda + 4\Omega_0^2 \right)$$

$\Rightarrow$  Eigenwerte:  $\lambda_1 = 0$  (Goldstone-Mode  $\leftrightarrow$  Rotationssymmetrie)  
 $\Rightarrow$  für Stabilität nicht ausschlaggebend

$$\lambda_{2,3} = -\Gamma \pm i \sqrt{4\Omega_0^2 - \Gamma^2}$$

Frequenz der Relaxationsoszillationen  
 $|2\Omega_0| > |\Gamma|$

$\Rightarrow$  Fixpunkt ist Fokus!

Linearisierung mit Kontrolle:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\Gamma & -4\Omega_0 & 0 \\ \Omega_0 & 0 & 0 \\ -\Omega_0\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ x \\ y \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sum R^m (x(t-\delta-m\tau) - x(t-\delta-(m+1)\tau)) \\ \sum R^m (y(t-\delta-m\tau) - y(t-\delta-(m+1)\tau)) \end{pmatrix}$$

Charakteristische Gleichung:

$$0 = (2\Gamma + 1) \left[ (K e^{-\lambda\delta} \chi)^2 + \lambda^2 + 2\lambda K e^{-\lambda\delta} \chi \cos\varphi \right] + 4\Omega_0^2 \left( 1 + K e^{-\lambda\delta} \chi \cos\varphi + \alpha K e^{-\lambda\delta} \chi \sin\varphi \right)$$

mit  $\chi = \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{1 - R e^{-\lambda\tau}}$

Eigenwerte  $\lambda$  numerische bestimmen in Abhängigkeit von den Kontrollparametern:  $K, \varphi, \delta, \tau, R$

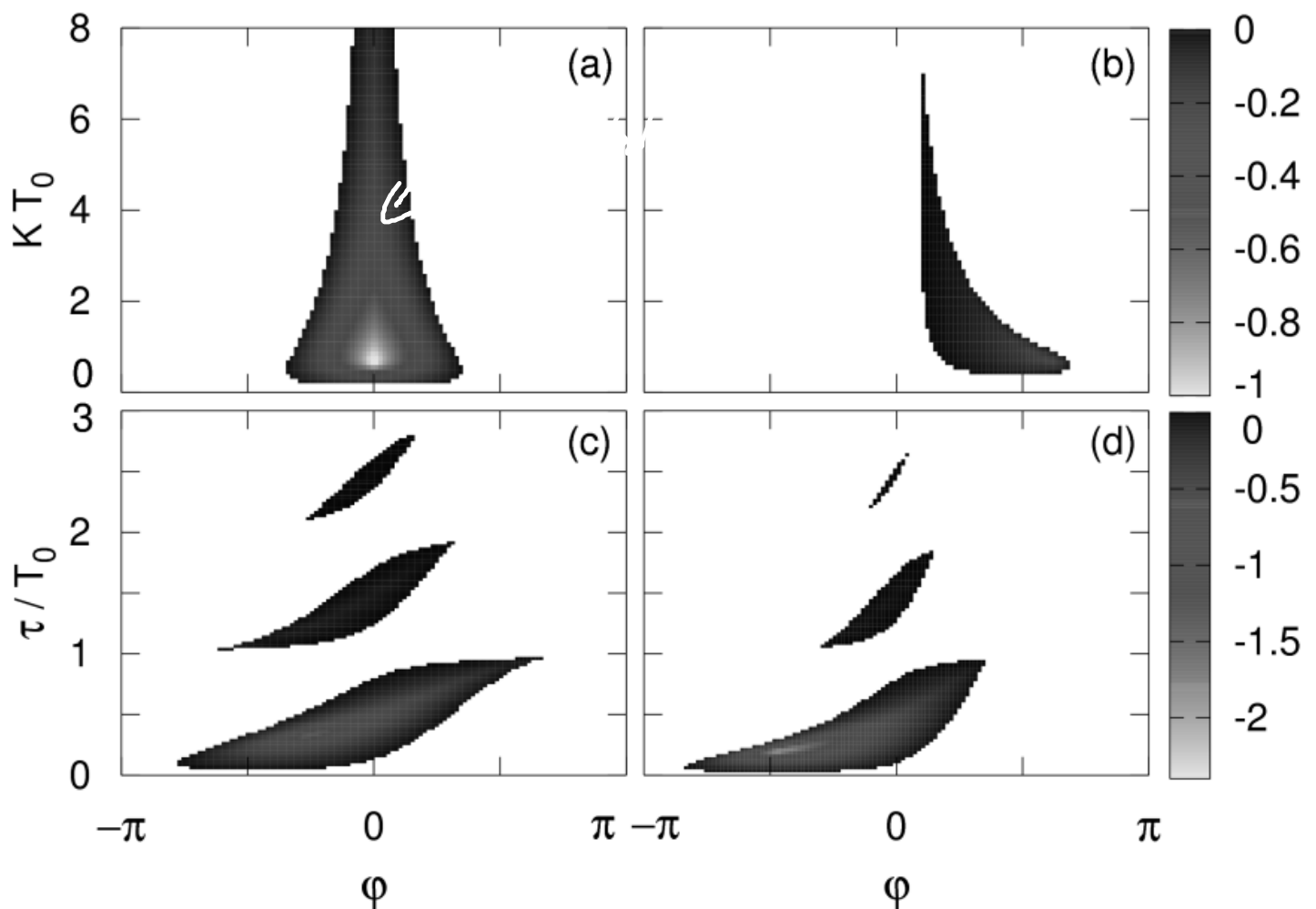
$\Rightarrow$  Stabilitätsdiagramme als 2D-Projektionen des SD-Kontrollparameter-raums (3 Parameter konstant, 2 variable)

Vgl.: Fokus + Pyragas-Kontrolle mit Phase  $\varphi$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) - x(t-\tau) \\ y(t) - y(t-\tau) \end{pmatrix}$$

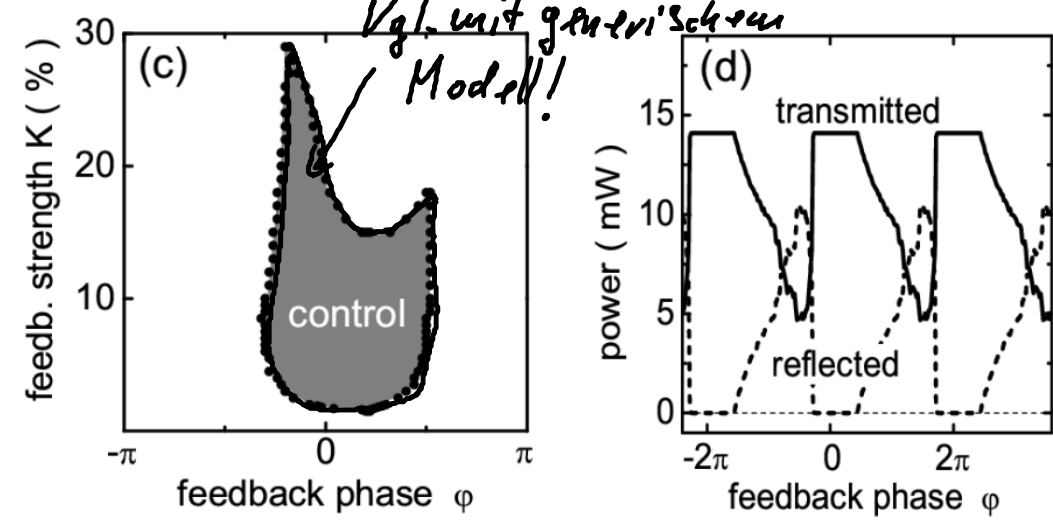
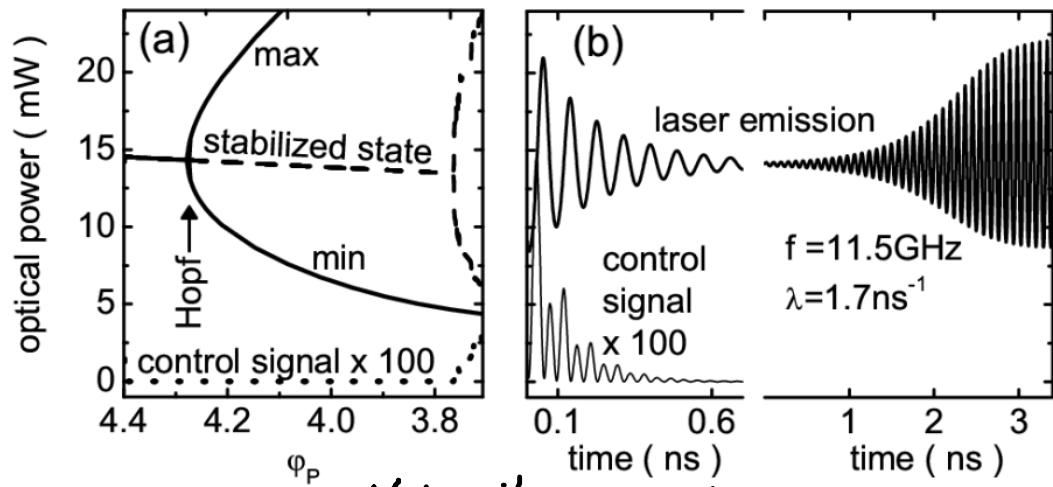
Charakteristische Gleichung:  $\lambda + K e^{\pm i\varphi} (1 - e^{-\lambda\tau}) = \lambda \pm i\omega$

Ref.: Schikova et al. PRL 97, 213902 (2006)

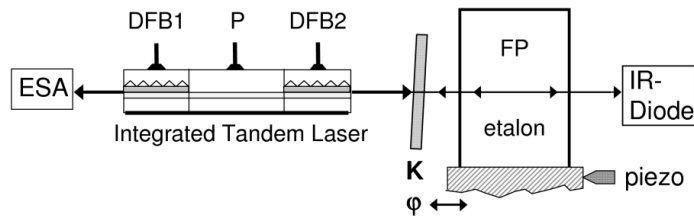


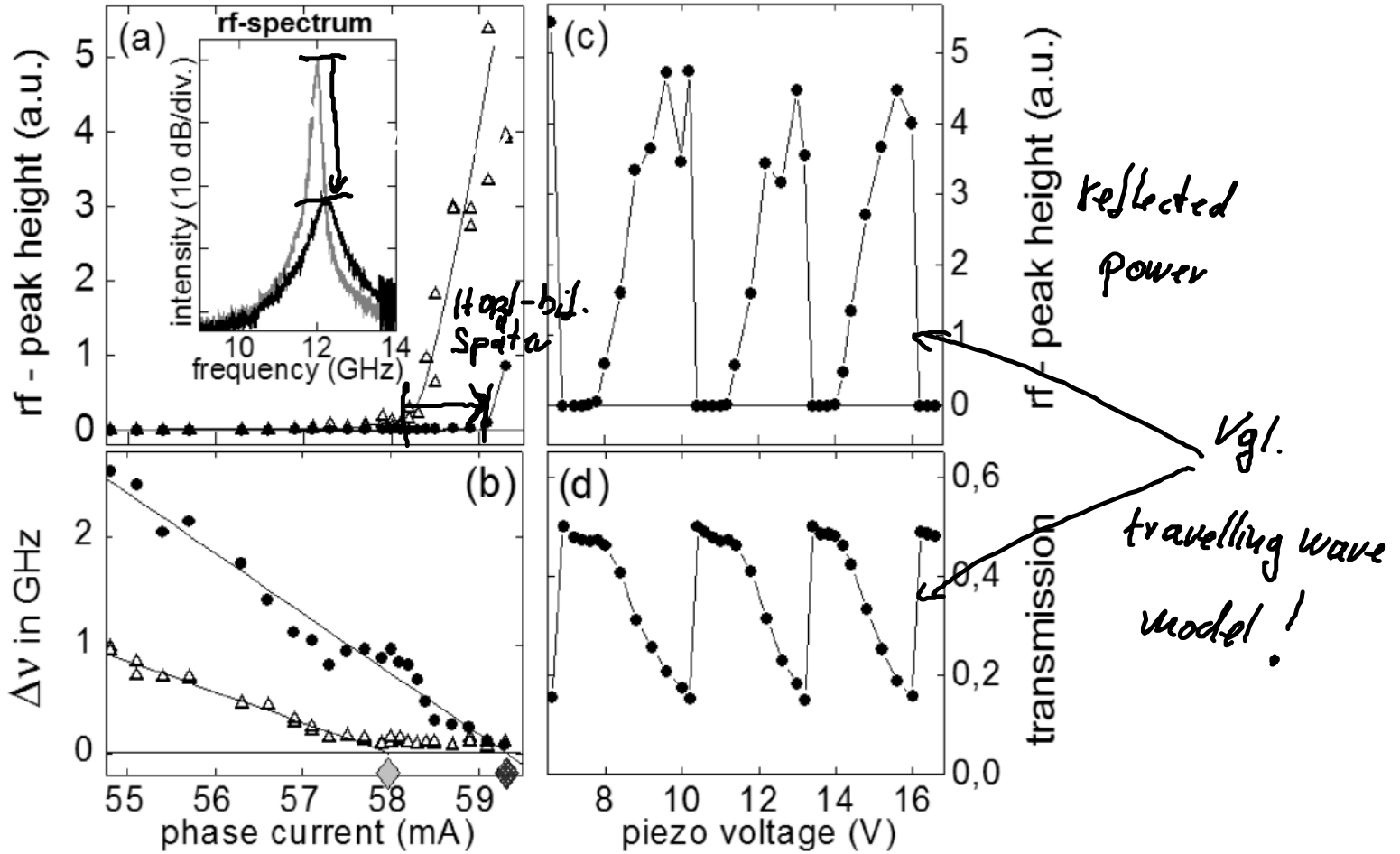
Vgl. das generische Modells mit detaillierterem Laser-Modell ("travelling wave model", PDE in 1D)

entlang der optischen Achse



Ergebnisse aus dem Experiment:





⇒ Fazit: rein optische Kontrolle des lasenden Fixpunkts durch zeitverzögerte Rückkopplung!

## 6.2 Rausch ausdrückung im Laser

Ref.: Flunkert, Schöll: PRE 76, 066202 (2007)

(i) generischer FP:  $\dot{z} = (\lambda - i\omega_0)z + D\xi - \kappa[z(t) - z(t-\tau)]$

(ii) Lang-Kobayashi-Laser: s. Kap 6.1

(i)  $\dot{z} = (\lambda - i\omega_0)z + D\xi - \kappa[z(t) - z(t-\tau)]$ ,  $z \in \mathbb{C}$

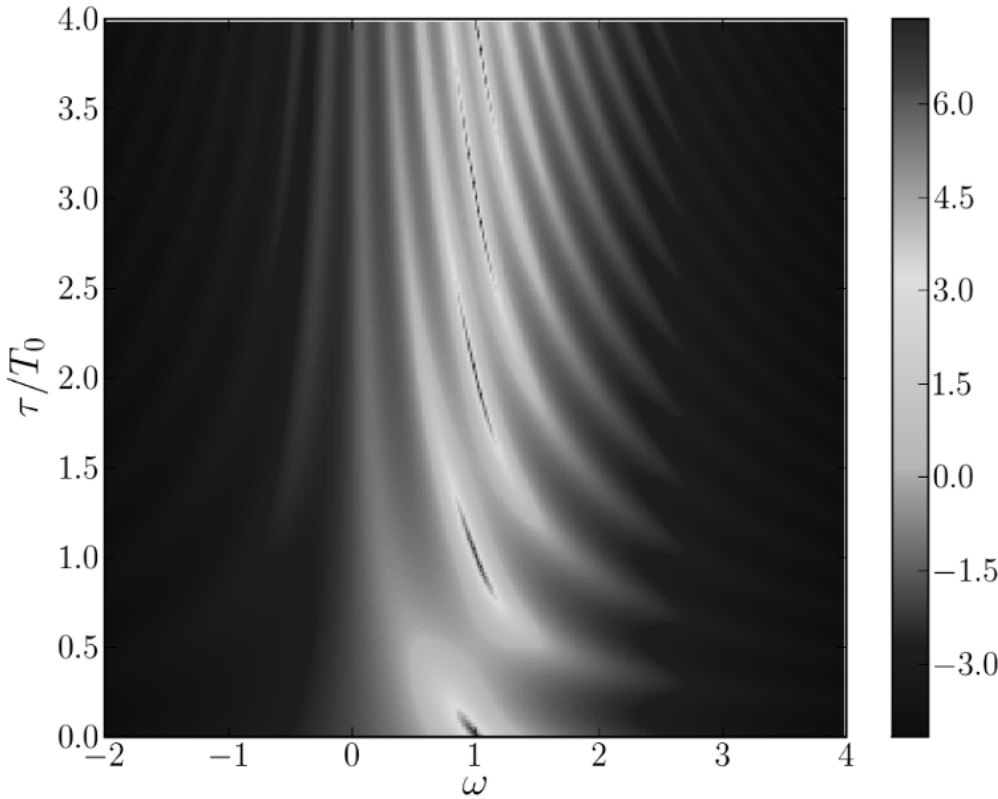
$\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$  Gauß'sches weißes Rauschen

$$\langle \xi_i \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = \delta_{ij} \int (t-t')$$

Power-Spektrum analytisch berechenbar

(s. Kap. 5.2, Pomplun et al.: Europhys. Lett. 71, 366 (2005))

$$S(\omega) = \frac{D^2}{2\pi} \frac{1}{\left[ \lambda - k(1 - \cos(\omega\tau)) \right]^2 + \left[ \omega - \omega_0 + k \sin(\omega\tau) \right]^2}$$



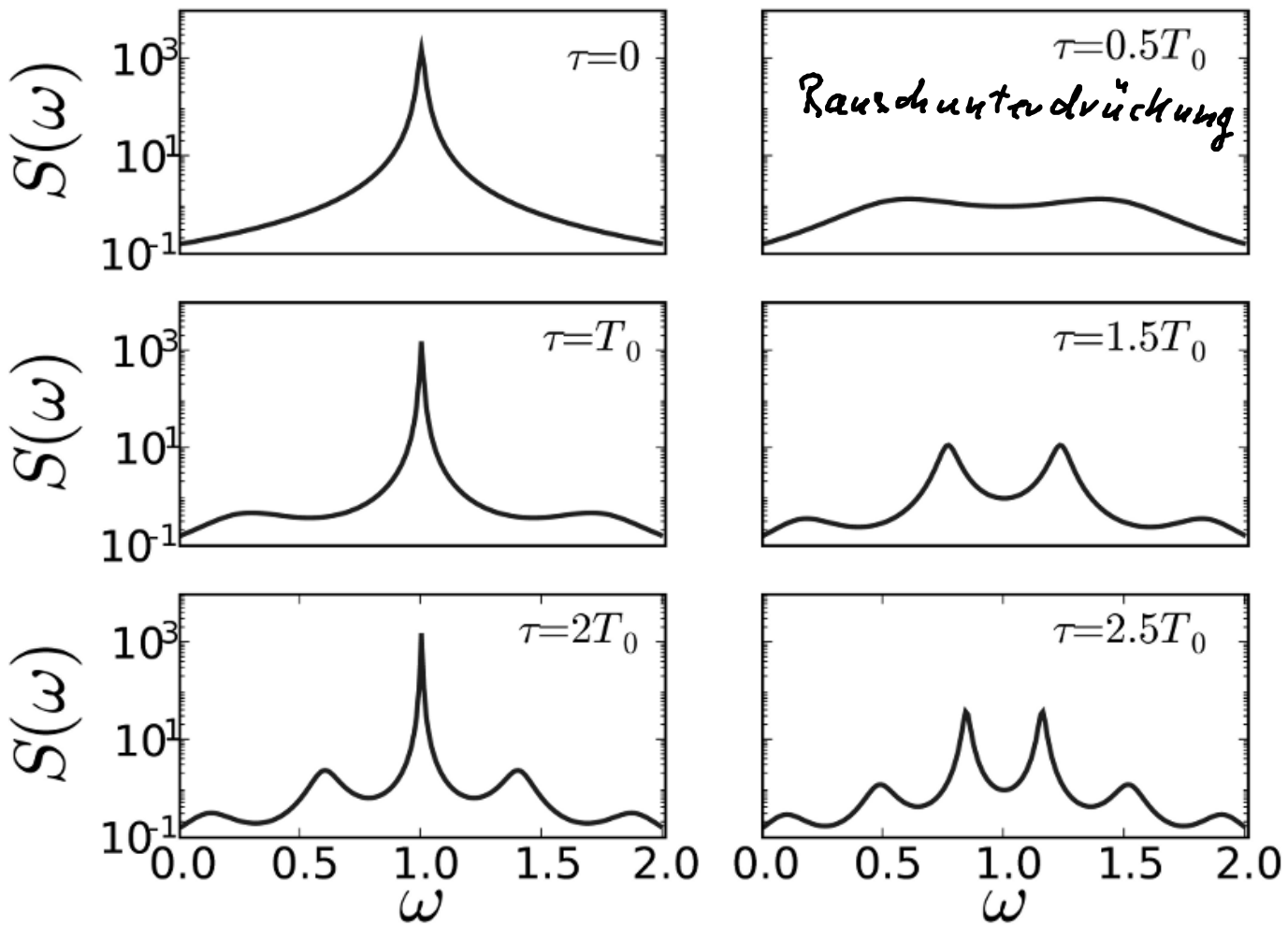
$\lambda = -0.01, \omega_0 = 1$   
(stabiler Fokus)

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi$$

$$D = 1$$

$$k = 0.2$$

1D-Schnitte für feste  $\tau$ :



Vgl. auch rauschinduzierten Oszillationen im Van-der-Pol-System

(Charakterisierung der Dynamik:

$\Rightarrow$  mittlere Amplitude  $\langle r^2 \rangle$  (Numerik, Analytik)

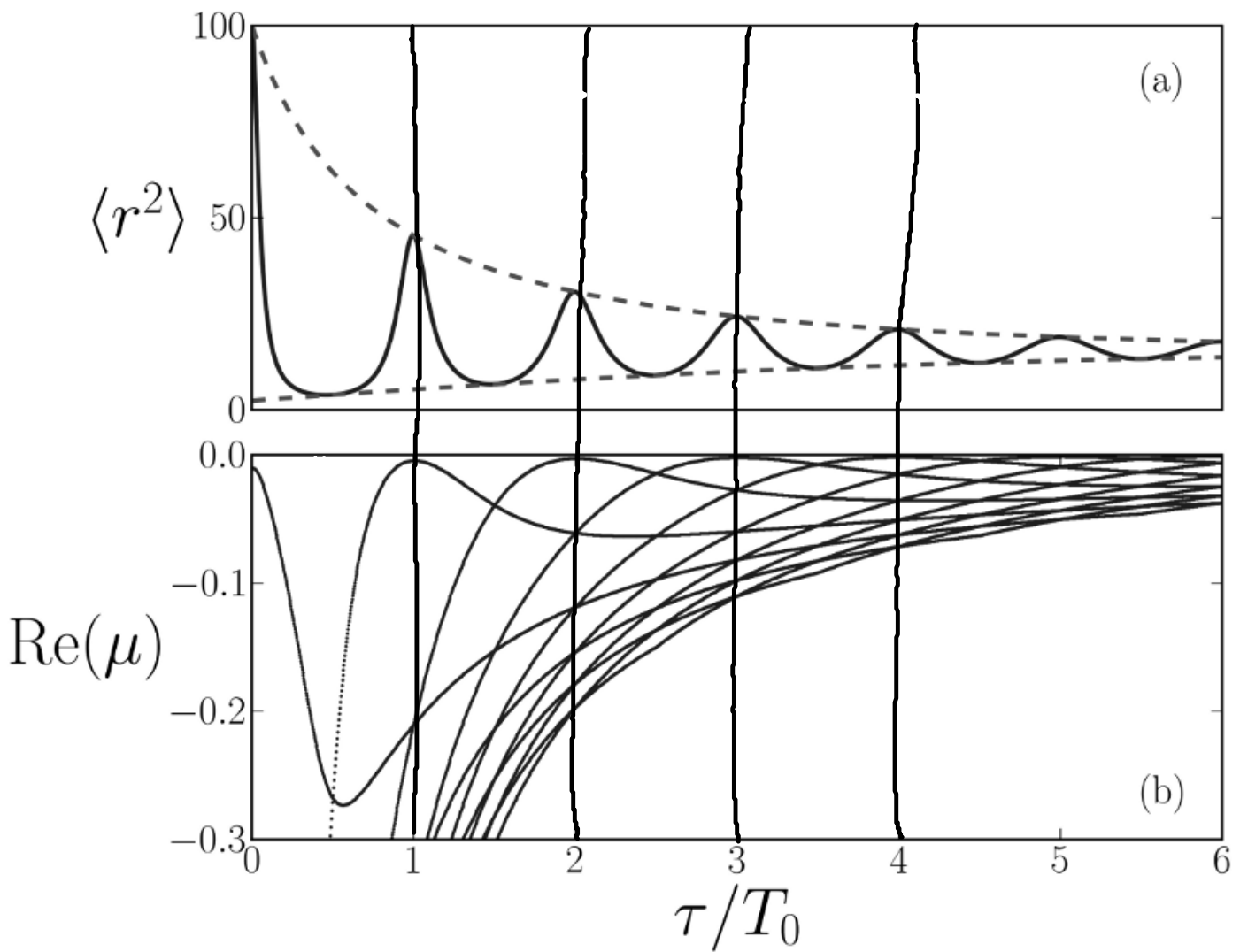
$\Leftrightarrow$  Eigenwerte des kontrollierten Systems

$$\mu = [\lambda - i\omega_0] - k(1 - e^{-\mu\tau})$$

lösbar mittels Lambert-Funktion ( $ze^z = z_0 \Rightarrow W(z_0) = z$ )

$$\Rightarrow \tau \mu_n = W_n \left( \tau k e^{-(\lambda - i\omega_0 - k)\tau} \right) + (\lambda - i\omega_0 - k)\tau$$





(ii) Lang-Kobayashi-Modell

(Gleichungen wie in 6.1: hier mit  $k(n) = \text{const.}$ )

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} (1 + id) u E - e^{i\varphi} K [E(t) - E(t - \tau)] + F_E$$

$$T \frac{dn}{dt} = I - n - (1 + u) |E|^2$$

mit Rauschen  $\langle F_E \rangle = 0$ ,  $\langle F_E(t) \overline{F_E(t')} \rangle = R_{sp} \delta(t - t')$

$$R_{sp} = \beta (n + n_0) \quad (\text{Spontane Emission})$$

Vgl. Power-Spektrum analytisch  $\leftrightarrow$  numerisch

$$I = 1, T = 1000, \alpha = 2$$

$$\beta = 10^{-5}, \nu_0 = 10, \kappa = 0.002$$

$$\Rightarrow \bar{T}_0 = 200$$

Rauschunterdrückung (wie im FP-Modell) bei  $\tau = \frac{\bar{T}_0}{2}$ .

