

Wk: $\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle$
 Ehrenfest-Theorem

(Klass: $\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}$)

V.2. Zeitentwicklungsoperator

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial \hat{U}(t, t_0)}{\partial t} |\psi(t_0)\rangle \stackrel{\text{Konstant}}{=} \hat{H} |\psi(t)\rangle \stackrel{\text{SG}}{=} \hat{H} \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H} \hat{U}(t, t_0)$

 ZwSC für \hat{U}

Lösung: $\hat{U}(t, t_0) = \mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t') \hat{U}(t', t_0)$

Vereinfachung für Systeme mit $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = 0$

$$-i\hbar \hat{H}(t-t_0)$$

$$\hat{U}(t, t_0) = e$$

check: $i\hbar \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t-t_0)} (-\frac{i}{\hbar} \hat{H}) (i\hbar) = \hat{U} \hat{H} = \hat{H} \hat{U}$

zu zeigen durch Potenzreihen-entw. von \hat{U}
 $[\hat{H}, \hat{H}] = 0$

Weitere Eigenschaften von \hat{U} :

i) Forderung: Die Norm eines Zustands $|\psi\rangle$ darf nicht von der Zeit abhängen

Grund: Norm $\hat{=}$ Integral über die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $\langle\psi|\psi\rangle = \int |\psi^*(t)\psi(t)| dt$
— Wahrscheinlichkeitserhaltung

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

also:

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle \stackrel{!}{=} \langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle$$

$$\langle\hat{U}\psi(t_0)|\hat{U}\psi(t_0)\rangle \stackrel{!}{=} \langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle$$

$$\langle\psi(t_0)|\hat{U}^\dagger\hat{U}|\psi(t_0)\rangle \stackrel{!}{=} \langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle$$

also muß gelten: $\hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) = \mathbb{1}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\hat{U}^\dagger(t, t_0) = \hat{U}^{-1}(t, t_0)}$$

\hat{U} ist ein unitärer Operator!

speziell für Systeme mit zeitabhängigem \hat{H} folgt

$$\hat{U}^{-1}(t_0, t) = \left(e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t, t_0)} \right)^{-1} = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t, t_0)} = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_0, t)} = \hat{U}(t_0, t)$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } |\psi(t)\rangle &= \hat{U}(t, t') |\psi(t')\rangle \\ &= \hat{U}(t, t') \hat{U}(t', t_0) |\psi(t_0)\rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t, t') \hat{U}(t', t_0)$$

(iii) Systeme mit Zeittranslationsinvarianz \Leftrightarrow Energieerhaltung
 (Noether'sche Theoreme)

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t - t_0)$$

nur Zeitdifferenz ist relevant!

V.3. Zur Konstruktion weiterer Darstellung der Dynamik ("Bilder")

Bisher: "Schrödinger-Bild" der Dynamik

- Zustände $|\psi\rangle = |\psi(t)\rangle$ sind zeitabhängig
- Operatoren zu zeitunabhängigen Observablen sind zeitunabhängig
- BWGL: $\hat{H} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$ Schrödinger-Gl. (SG)

Das ist nicht die einzig mögliche Darstellung!

Idee: Die physikalischen Messgrößen eines Systems, d.h. die Erwartungswerte (und Eigenwerte) bleiben unverändert bei einer unitären Transformation

sei $|\bar{\psi}\rangle = \hat{U}^\dagger |\psi\rangle$; $\hat{A} = \hat{U}^\dagger \hat{A} \hat{U}$ transformierte Zustände und Operatoren

$$\langle \bar{\psi} | \hat{A} | \bar{\psi} \rangle = \langle \hat{U}^\dagger \psi | \hat{A} | \hat{U}^\dagger \psi \rangle = \langle \psi | \hat{U} \hat{A} \hat{U}^\dagger | \psi \rangle$$

$$= \langle \psi | \underbrace{\hat{U} \hat{U}^\dagger}_{\hat{1}} \hat{A} \underbrace{\hat{U} \hat{U}^\dagger}_{\hat{1}} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

Erwartungswert bleibt erhalten, wie gefordert!

(Bemerkung: man hätte auch definieren können: $|\bar{\psi}\rangle = \hat{U} |\psi\rangle$, $\hat{A} = \hat{U} \hat{A} \hat{U}^\dagger$)

V. 4. Das Heisenberg-Bild der Dynamik

Konzept: Zustände sind zeitunabhängig, Operatoren sind immer zeitabhängig

Deutung der Zustände

$|\psi_H(t)\rangle = |\psi_H\rangle = |\psi(t_0)\rangle$
Heisenberg-Zustand Zustand im Schrödingerbild zu Zeit t_0
für alle Zeiten t

benutze $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \Rightarrow |\psi(t_0)\rangle = \hat{U}^{-1}(t, t_0) |\psi(t)\rangle$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\psi_H(t)\rangle &= |\psi_H\rangle = \hat{U}^{-1}(t, t_0) |\psi(t)\rangle \\ &= \hat{U}^\dagger(t, t_0) |\psi(t)\rangle \end{aligned}$$

Definition der Heisenberg-Operatoren:

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{A} \hat{U}(t, t_0)$$

↑
Operator im
Schrödingerbild

Zeitentwicklungsgenerator im
Heisenbergbild

Damit:

$$\langle \psi_H | \hat{A}_H(t) | \psi_H \rangle = \langle \tilde{u}^+ \psi | \tilde{u}^+ \hat{A} \tilde{u} | \tilde{u}^+ \psi \rangle$$

Erwartungswert im Heisenbergbild

$$\langle \psi | \underbrace{\tilde{u} \tilde{u}^+}_{\hat{1}} \hat{A} \underbrace{\tilde{u} \tilde{u}^+}_{\hat{1}} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \quad \text{d.h.}$$

BWGL für die Operatoren im Heisenbergbild (Zustände sind ja zeitlich konstant!)

$$\frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) = \frac{d}{dt} (\tilde{u}^+(t, t_0) \hat{A} \tilde{u}(t, t_0))$$

$$\Rightarrow \frac{d\tilde{u}^+}{dt} \hat{A} \tilde{u} + \tilde{u}^+ \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \tilde{u} + \tilde{u}^+ \hat{A} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}$$

Produktregel

benutze die BWGL für \tilde{u} (Kap. V.2.)

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \hat{H} \tilde{u} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \hat{H} \tilde{u}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}^+}{\partial t} = \left(\frac{1}{i\hbar} \hat{H} \tilde{u} \right)^+ = -\frac{1}{i\hbar} \tilde{u}^+ \hat{H}^+ = -\frac{1}{i\hbar} \tilde{u}^+ \hat{H}$$

einsetzen:

$$\frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) = -\frac{1}{i\hbar} \tilde{u}^+ \hat{H} \hat{A} \tilde{u} + \tilde{u}^+ \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \tilde{u} + \tilde{u}^+ \hat{A} \left(\frac{1}{i\hbar} \right) \hat{H} \tilde{u}$$

$$= -\frac{1}{i\hbar} \tilde{u}^+ \hat{H} \underbrace{\tilde{u} \tilde{u}^+}_{\hat{1}} \hat{A} \tilde{u} + \tilde{u}^+ \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \tilde{u} + \frac{1}{i\hbar} \tilde{u}^+ \hat{A} \tilde{u} \underbrace{\tilde{u}^+ \hat{H}}_{\hat{1}}$$

benutze: $\hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} = \hat{H}_H(t)$

$\hat{U}^\dagger \hat{A} \hat{U} = \hat{A}_H(t)$

definiere: $\frac{\partial}{\partial t} \hat{A}_H(t) := \hat{U}^\dagger \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \hat{U}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)] + \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}_H(t)}$$

ersetzt die SG

Bemerkungen

i) Systeme mit zeitunabhängigem \hat{H}

$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t - t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar}$

$\hat{H}_H(t) = e^{+i\hat{H}(t-t_0)/\hbar} \hat{H} e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar} = \hat{H} = \hat{H}$
 (weil \hat{H} verstanden!) Hamiltonoperator der M im Wechselbild

ii) Vergleich mit Ehrenfest'schen Theorem

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle$$

$$\frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle$$

iii) Folgerung aus dem Heisenberg'schen BUNGL:

falls $\frac{\partial \hat{A}_H}{\partial t} = \hat{U}^\dagger \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \hat{U} = 0$ und $[\hat{A}_H, \hat{H}_H] = \hat{U}^\dagger [\hat{A}, \hat{H}] \hat{U} = 0$

\Rightarrow Die Observable ist eine Konstante der Bewegung!

V.5. Dirac-Bild (Wechselwirkungsbild) der Dynamik

steht zwischen Schrödingerbild und Heisenbergbild
insofern, als sowohl Zustände als auch Observablen
zeitabhängig sind!

Dirac-Bild ist geeignet für Systeme mit Hamiltonoperator
der Form

$$\hat{H}(\epsilon) = \hat{H}_0 + \hat{H}_1(\epsilon)$$

↖
zeitunabhängig

$$\frac{\partial \hat{H}_0}{\partial \epsilon} = 0$$

↗ zeitabhängig

z.B. Kopplung an ein zeitlich
oszillierendes elektr. oder
magnet. Feld

„Wechselwirkung mit Umgebung“

häufig kann man $\hat{H}_1(\epsilon)$ als „klein“ betrachten gegenüber \hat{H}_0
 $\Rightarrow \hat{H}_1$ repräsentiert eine kleine „Störung“

Dirac-Bild hat wichtige Bedeutung bei der
Konstruktion einer zeitabhängigen Störungstheorie